

Fysikaalinen mallintaminen

Kari Peisa,
pLAB virtuaalilaboratorio
Ramk teli

7.5.2004

Sisältö

1	Johdanto	1
1.1	Toimintaympäristö	1
1.2	Fysikaalinen ja matemaattinen perusta	1
2	Matemaattiset apuneuvot	2
2.1	Vertailukoordinaatistot	2
2.2	Differentiaaligeometriaa	4
2.2.1	Vektorifunktioista ja yleisestä käyräteoriasta	4
2.2.2	Säännöllinen parametrinen käyrä	5
2.2.3	Käyrän parametri	6
2.2.4	Käyrän yksikkötangentti, yksikkönormaali ja yksikkö- binormaali sekä oskuloiva taso	7
2.3	Käyrän kaarevuus kaarenpituuden funktiona	9
2.4	Käyrän kaarevuus yleisen parametrin funktiona	10
3	Mallintaminen	12
3.1	Virtuaalisen liikkeen ohjausparametrit fysiikkamoduulissa . . .	12
3.2	3D käyrän konstruointi	13
3.2.1	Kochanek-Bartelsin Cubic Spline konstruointitekniikka	13
3.2.2	3D käyrän konstruointi	15
3.3	Kelkan ilmalennon mallintaminen	17
3.4	Kelkan kallistumisen mallintaminen	20
3.4.1	Kallistuksen alkamishdot	22
3.4.2	Kallistuksen kulmasuureet	23
3.4.3	kelkan kaatuminen	24
3.4.4	Kuljettajan vaikutus	24

4	Fysiikkamoduuli	25
4.1	Toimintaympäristö	25
4.2	Algoritmit ja funktiot	28
4.2.1	Fysiikkamoduulin toimintasilmukka ulkoisen ohjelmis- ton yhteydessä	28
4.2.2	Fysiikkamoduulin toiminta-algoritmi ja funktiot	28
4.2.3	fysiikkamoduulin globaalit muuttujat	30
4.3	Testauksesta	30
4.4	Loppuarviointia	33

Kuvat

1	Eulerin kulmat	3
2	Testipinta	15
3	Spline käyrän määrittäminen	16
4	Spline käyrä ja pisteet	16
5	Spline käyrä ja pinta	16
6	Parametrin t (aika) vaikutus käyrään	17
7	Kaarevuus ja kaarevuussäde	18
8	Yksikkövektoreiden laskeminen	18
9	Objektin koordinaatisto	19
10	Kelkan irtautumisen tutkiminen Mathematicalla	19
11	Ilmalentoradan laskeminen	19
12	Kelkan ilmalento	20
13	Kelkan kallistuminen	21
14	Mallinnuksen ympäristö	26
15	Testiaineisto	31
16	1. testiajo	31
17	Testitulosten muunto graafiseen muotoon	31
18	Kelkan alkuperäiset ja mallinnetut pisteet 1. ajossa	32

19	2. testiajo	32
20	Kelkan alkuperäiset ja mallinnetut pisteet 2. ajossa	32
21	Fysiikkamoduulin yhden evaluointikierroksen vaatima aika testiajossa.	34

Tiivistelmä

Tämä dokumentti kuvaa virtuaalimaailmassa liikkuvan moottorikelkan fysiikkaalista mallintamista. Dokumentti on valmistettu Rovaniemen ammattikorkeakoulun Tekniikan ja Liikenteen pLAB ohjelmointilaboratorion tarpeisiin. Moottorikelkka on kiinnitetty laboratoriossa olevalle liikealustalle, joka ”liikkuu” kelkan eteen valkokankaalle heijastetussa virtuaalimaailmassa reagoiden reaaliajassa kuljettajalta ja virtuaalimaailmasta tuleviin impulsseihin.

Dokumentin luvut 1-3 esitävät mallintamisen suunnitteluun liittyviä teoreettisiin perusteita. Luvussa 4 kuvataan varsinainen Mathematica ohjelmalla toteutettu fysiikkamoduuli, esitellään moduulin yleinen toiminta-algoritmi ja funktiot sekä niiden rajapinnat sitä käyttävän ulkoisen ohjelmiston välillä.

Tämä dokumentti on kirjoitettu WinEdt ohjelmalla LaTeX-ladontaohjelmaa käyttäen. Kaikki dokumentissa esiintyvät kuvat on tehty Mathematicalla ja upotettu dokumenttiin *eps* kuvaformaattissa. Myös Mathematican koodiesimerkit on upotettu dokumenttiin *eps* muodossa.

1 Johdanto

1.1 Toimintaympäristö

Ohjelmointilaboratorion Moog-liikealusta on kiinnitetty alustansa kuudella sylinterillä, joiden pituutta voidaan muuttaa ohjelmallisesti virtuaalitodellisuudesta ja ajajalta tulevien impulssien mukaan. Sylinterin pituuksia muuttamalla luodaan alustan päällä olevan laitteen ajajalle tuntuma reaaliaikaisesta liikkeestä valkokankaalle heijastetussa virtuaalitodellisuudessa. Myös heijastetun kuvan käsittelyllä voidaan ajajan liiketuntemuksia vahvistaa.

Varsinainen liikealustan ohjelmisto on esitelty Antti Törmäsen ja Pertti Rauhalan tuottamassa Moog liikealustaohjelmiston toteutusdokumentissa. Tässä dokumentissa selvitetään liikealustan päälle asennetun moottorikelkan fyysikaalisen käyttäytymisen teoreettisia perusteita ja kuvataan fyysikaalista mallintamista huolehtivan fysiikkamoduulin toteutus.

Fysiikkamoduuli on toteutettu Mathematican ohjelmapakettina (Mathematica package), jota voidaan kutsua ulkoisesta ohjelmasta (esim. C++ -ohjelma) käsin. Paketin kutsuminen käynnistää koneessa olevan Mathematican Kernel-ohjelman, joka suorittaa pakettiin ohjelmoidut kutsuttavat funktiot. Mathematican mukana tuleva MathLink ohjelmisto huolehtii Mathematican ja ulkoisen ohjelmiston välisestä tiedonsiirrosta.

1.2 Fysikaalinen ja matemaattinen perusta

Fysikaalisessa mallintamisessa sovelletaan yleistä jäykän kappaleen etenevän ja pyörivän liikkeen kinematiikkaa ja dynamiikkaa. Matemaattisina apuneuvoina käytetään 3-ulotteisen parametrimuotoisen funktion differentiaalilaskentaa. Erityisesti käytetään tekniikkaa, jossa konstruoidaan annettujen pisteiden kautta ”pehmeästi” kulkeva 3D spline-käyrä (cubic spline) so. paloittain määritelty parametrimuotoinen käyrä, jonka komponentit ovat 3. asteen polynomifunktioita. Käyrä on jatkuva ja sen derivaatta on myös kaikkialla jatkuva. 3D spline-käyrän avulla voidaan laskea kelkan virtuaalisen ratakäyrän kaarevuuksia, joita tarvitaan mallinnuksessa tutkittaessa kelkan irtautumista pintakosketuksesta. Konstruointitekniikkana käytetään Kochanek-Bartels Cubic Splines -tekniikkaa (TCB Splines), jota käytetään mm. 3D tietokonegrafiikan geometrisessa mallintamisessa.

2 Matemaattiset apuneuvot

2.1 Vertailukoordinaatistot

Reaalimaailman 3-ulotteisten objektien paikan, asennon ja liiketilan esittäminen virtuaalisessa ympäristössä perustuu eri vertailukoordinaatistojen (reference frames) käyttöön. Yleisesti Interaktiivisen 3D virtuaalitodellisuuden ympäristössä voidaan käyttää jopa viittä eri koordinaatistoa:

- *maailmakoordinaatisto* kertoo objektien absoluutisen sijainnin 3D maailmassa.
- *objektin koordinaatisto* kiinnittyy 3D maailmassa olevaan objektiin ja kertoo objektin sisäiset mittasuhteet. Nämä koordinaatit pysyvät muuttumattomina riippumatta objektin sijainnista ja asennosta maailmakoordinaatistoon nähden.
- *kameran koordinaatistossa* esitetään virtuaaliympäristöstä muodostettu näkymä siten, että origo sijaitsee kamerassa. Kamera voi olla kiinnitetty myös objektiin.
- *kuvakoordinaatisto* kertoo 3D maailman objektien sijainnin ja aseman kameraan nähden projisoidulla kuvapinnalla.
- *pikselikoordinaatistossa* esitetään 3D maailmasta muodostetun 2-ulotteisen kuvan jokaisen pisteen sarake- ja rivi-arvot.

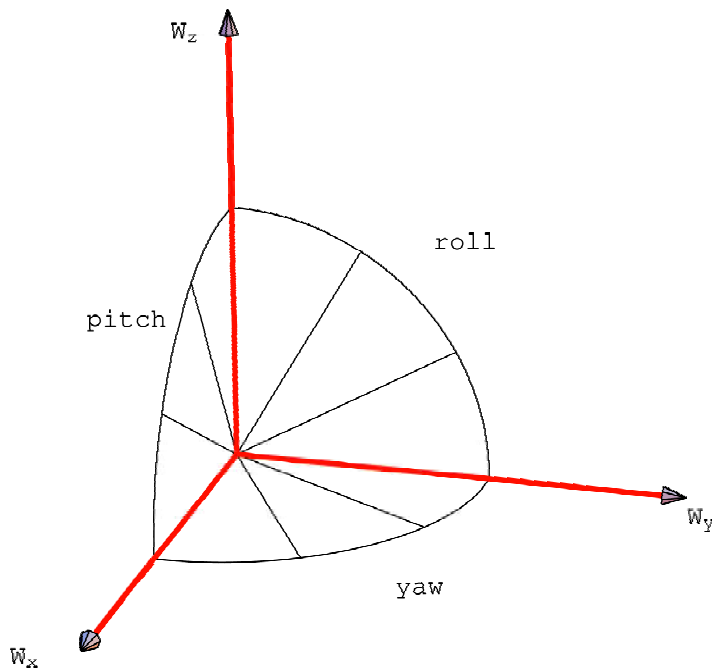
Virtuaalimaailmassa kelkka ja kelkan alla oleva pinta muodostavat reaalimaailman objektit. Fysikaalin mallintaminen perustuu erityisesti maailmakoordinaatiston ja näiden kahden objektin koordinaatistojen käyttöön. Kamerakoordinaatisto on kiinnitetty kelkkaan, joten kelkan ja kameran koordinaatistot ovat koko ajan yhtenevät. Alkuhetkellä niiden akselit ovat samansuuntaiset kuin maailmakoordinaatistolla. Kelkan kuljettajan 3D maailman näkymä muodostetaan siten aina kelkasta käsin. Tätä näkymän muodostumista ei käsitellä tässä dokumentissa.

Mallinnuksessa tarvitaan tietoa ajasta riippuvista kelkan maailmakoordinaateista x , y ja z sekä kelkan ja pinnan asennosta maailman koordinaatiston akseliin nähden. Tällöin täytyy myös sopia siitä mihin suuntaan kaltevuudet määritetään. Yleensä liikkuvan objekti koordinaatistyo asetetaan niin että objekti suuntaa kohti positiivista x -akselia. Tällöin objektin vasen-oikea

suunta muodostuu y-akselista ja korkeussuunta z-akselista alhalta ylös oikeankäden säännön mukaisesti. Objektiin asentoa maailmakoordinaatistossa kuvataan kolmen kulman, Eulerin kulmien, avulla.

- **roll.** Objektiin kiertyminen maailmakoordinaatiston x-akselin suhteen eli kelkan tai pinnan kaltevuus menosuuntaan (x-akseli) nähden poikittaisessa suunnassa
- **pitch.** Objektiin kiertyminen maailmakoordinaatiston y-akselin suhteen eli kelkan tai pinnan kaltevuus menosuunnassa
- **yaw.** Objektiin kiertyminen maailmakoordinaatiston z-akselin suhteen eli objektiin menosuunta vaakatasossa ajateltuna

Kuva 1: Eulerin kulmat



Objektiin asento maailmankoordinaatistossa voidaan ajatella syntyvän edellisten kolmen peräkkäisen kierron summana. Kiertymiskulmat akseleiden suhteen eivät kuitenkaan ole yksikäsitteisiä tietyn objektiin asennon suhteen. Sama asento voidaan saada useiden eri kiertymisien summana. Kun rajataan

Eulerin kulmat välille $(-180^\circ, 180^\circ)$ ja sovitaan kiertojärjestys, yksikäsitteisyys saavutetaan. Yleensä kiertojärjestykseksi sovitaan *yaw, pitch, roll* tai *roll, pitch, yaw*. Lisäksi termien *yaw* ja *roll* tilalla voidaan käyttää termejä *heading* tai *bank* vastavasti.

Mallinnuksessa luetaan kameran antamat tiedot suoraan kelkan alapuolella olevan pinnan paikasta maailmakoordinaatistossa, x , y ja z , sekä pinnan koordinaatiston kiertymisestä liikesuuntaan nähden poikittaisessa (*roll*) ja pitkittäisessä (*pitch*) suunnassa. Edellisten tietojen lisäksi luetaan ajajan kelle antamat impulssit, joiden perusteella lasketaan kelkan liiketila pinnan päällä. Kelkan suunta *yaw* määräytyy ratin asennon perusteella ilman fysiikkaalista mallinnusta.

2.2 Differentiaaligeometriaa

Seuraavissa kappaleissa esitetään pääpiirteissään ne matemaattiset apuneuvot differentiaaligeometriasta, joita hyödynnetään mallintamisen yhteydessä. Esityksessä ei pyritä yksityiskohtaiseen 3D käyrien ominaisuuksien johtamiseen vaan lähinnä ymmärrettävyyden kannalta oleelliset perusteet esitetään. Matemaattisesti oikeaoppiseen esitykseen voi perehtyä teoksista [1], [2] ja [3].

2.2.1 Vektorifunktioista ja yleisestä käyräteoriasta

Kappaleen liikerata eli 3D ratakäyrä avaruudessa $\mathbf{R}^3$ voidaan esittää vektoriarvoisena funktiona

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k} = \{x(t), y(t), z(t)\}$$

Euklidisessa 3-ulotteisessa koordinaatistossa, missä argumentti t merkitsee ajanhetkeä. Funktiota kutsutaan myös parametriseksi käyräksi tai lyhyemmin käyräksi.

Konstruoidaessa käyrän parametrinen esitys tunnetuista peräkkäisistä paikkavektoreista $\mathbf{a}_i$ ajanhetkillä t_i tarvitaan tietoa myös kappaleen liiketilasta kyseisissä paikoissa, jotta saataisiin käyrä kulkemaan ”pehmeästi” tunnettujen pisteiden kautta. Differentiaaligeometria antaa tarvittavan yhteyden käyrän parametrisen esityksen ja kappaleen liiketilan välille.

Kappaleen hetkellisen nopeuden ilmaisee paikkavektorin derivaatta, joka, mikäli funktio $\mathbf{r}(t)$ on derivoituva, saadaan komponenttiensa derivaatoista

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} = \{x'(t), y'(t), z'(t)\}.$$

Vektori $\mathbf{r}'(t)$ on jokaisella hetkellä ratakäyrän tangentin suuntainen ja sen pituus

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t)}$$

ilmaisee kappaleen todellisen skalaarisen vauhdin v ajanhetkellä t . Kappaleen hetkellinen kiihtyvyys saadaan vastaavasti paikkavektorin 2. kertaluvun derivaatasta

$$\mathbf{r}''(t) = \{x''(t), y''(t), z''(t)\}.$$

Kiihtyvyysvektorin $\mathbf{r}''(t)$ suunta ja suuruus määräytyy kappaleen fyysisen liiketilan perusteella. Kiihtyvyyttä tarkastellaan yleensä kahden kohtisuoran komponentin ratakäyrän tangentin suuntaisen tangentialisen kiihtyvyyden $\mathbf{a}_t$ ja sitä vastaan kohtisuoran kiihtyvyyden normaalikiihtyvyyden $\mathbf{a}_n$ eli keskeiskiihtyvyyden avulla. Tämä periaate esitellään kappaleessa 2.4.

2.2.2 Säännöllinen parametrinen käyrä

Parametrin käyrän esitys ei ole yksikäsitteinen. Kaksi käyrää $\mathbf{r}_1(t), t \in (a, b)$ ja $\mathbf{r}_2(\tau), \tau \in (\alpha, \beta)$ ovat ekvivalentit eli niiden määrittämät käyrät yhtyvät, jos on olemassa aidosti kasvava funktio $t = t(\tau)$, joka kuvaa välin (α, β) välille (a, b) siten, että kaikilla $\tau \in (\alpha, \beta)$

$$\mathbf{r}_1(t(\tau)) = \mathbf{r}_2(\tau).$$

Esimerkiksi käyrät $\mathbf{r}_1(t) = \{3t, 1 - 2t, t^2\}$ ja $\mathbf{r}_2(\tau) = \{6\tau, 1 - 4\tau, 4\tau^2\}$ ovat ekvivalentit, sillä $\mathbf{r}_1(2\tau) = \mathbf{r}_2(\tau)$.

Käyrä $\mathbf{r}(t)$ kuuluu funktioiden luokkaan $\mathcal{C}_n$, jos sillä on jatkuvat osittaisderivaat kertalukuun n saakka. Käyrää kutsutaan **säännölliseksi** luokassa $\mathcal{C}_n$, jos sillä on parametrinen esitys $\mathbf{r}(t), t \in (a, b)$, siten, että $\mathbf{r}(t) \in \mathcal{C}_n$ ja $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ kaikilla $t \in (a, b)$.

Edellisen määrittelyn mukaan säännöllisellä käyrällä on kaikkialla nollasta eroavat nopeusvektorit. Kinematiikan kannalta tämä merkitsee, että kappaleen liikkeen määrittelemä ratakäyrä on säännöllinen, jos kappale ei millään aikavälillä ole levossa. Suoraviivaisesti vakionopeudella etenevän kappaleen tai kiihtyvässä liikkeessä olevan kappaleen määrittelemä ratakäyrä on aina säännöllinen käyrä. Kiihtyvyys ei kuitenkaan merkitse käyrän kaarevuutta silloin, kun se on pelkästään radan tangentin suuntaista. Kaarevuuden määrittäminen on puolestaan fysikaalisen mallintamisen yksi keskeinen asia. Tämäkin seikka kertoo miten tärkeää on jakaa kappaleen kiihtyvyys radan tangentialiseen ja sitä vastaan kohtisuorassa olevaan normaalin suuntaisiin komponentteihin eikä koordinaattiakseleiden suuntaisiin.

2.2.3 Käyrän parametri

Parametrimuotoisen 3-ulotteisen käyrän eri ominaisuuksien kuvaaminen yleisen parametrin (tässä aika t) avulla on yleensä monimutkaisempaa kuin jos parametrina voidaan käyttää kaarenpituutta s . Seuraavassa tarkastellaan kaarenpituuden ja yleisen parametrin eroja määritettäessä säännöllisten käyrien ominaisuuksia. Sekaannusten välttämiseksi derivoinnin yhteydessä käytetään seuraavaa kirjoitusopimusta.

Funktion derivointi yleisen parametrin t (aika) suhteen ilmaistaan pistenotaatiolla

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r} = \dot{\mathbf{r}}$$

Funktion derivointi kaarenpituuden s suhteen ilmaistaan pilkkunotaatiolla

$$\frac{d}{ds}\mathbf{r} = \mathbf{r}'$$

Kaarenpituus yleisenä käyrän parametrina voidaan siten määrittää yhtälöllä

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\mathbf{r}}(u)| du. \quad (1)$$

Tällöin käyrän esitys $\mathbf{r}(s)$ ilmaisee kappaleen paikan, kun se lähtien liikkeelle kiinnitetystä pisteestä $\mathbf{P}_0 = \{x(t_0), y(t_0), z(t_0)\}$ on edennyt matkan s pitkin käyrää $\mathbf{r}(s)$. Kaarenpituuden parametri s riippuu määrittelyn ?? mukaan alkuhetken t_0 valinnasta. Kahdella eri alkuarvolla t_1 ja t_2 ($t_1 < t_2$) määritetyt kaarenpituusparametrit s_1 ja s_2 riippuvat toisistaan yhtälön

$$s_2(t) = s_1(t) + \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\mathbf{r}}(u)| du$$

mukaisesti, missä integraalin arvo on vakio. Siten kaikilla parametrin s valinnoilla käyrän esitykset ovat ekvivalentteja keskenään.

Koska $s = s(t)$ on aidosti kasvava, on sillä aidosti kasvava käänteisfunktio $t = t(s)$. Siten myös käyrän esitykset $\mathbf{r}(s)$ ja $\mathbf{r}(t(s))$ samoin kuin $\mathbf{r}(t)$ ja $\mathbf{r}(t(s))$ ovat keskenään ekvivalentit.

Esimerkki Määritetään käyrän $\mathbf{r}(t) = \{3 \cos 2t, 3 \sin 2t, 8t - 4\}$ ekvivalentti esitys kaarenpituuden funktiona, missä kaarenpituus lasketaan kiinnitetystä pisteestä $t = 0$.

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \{-6 \sin 2t, 6 \cos 2t, 8\}$$

$$|\dot{\mathbf{r}}(u)| = \sqrt{64 + 36 \cos^2 2t + 36 \sin^2 2t} = \sqrt{100} = 10$$

$$s(t) = \int_0^t 10 du = 10t.$$

Tällöin

$$\mathbf{r}(t(s)) = \mathbf{r}(s/10) = \left\{ 3 \cos \frac{s}{5}, 3 \sin \frac{s}{5}, -4 + 4 \frac{s}{5} \right\}$$

Esimerkissä kaarenpituuden esittäminen yleisen parameterin avulla onnistuu, koska käyrän komponenttifunktiot on valittu sopivasti ja integraali ?? voidaan määrittää. Yleisesti näin ei ole vaan kaarenpituuden määrittäminen yleisen parametrin esityksestä ei aina ole mahdollista tavallisten funktioiden avulla.

2.2.4 Käyrän yksikkötangentti, yksikkönormaali ja yksikköbinormaali sekä oskuloiva taso

3-ulotteista käyrää pitkin liikkuvan kappaleen liiketilan tutkiminen maailmankoordinaatiston akselien suuntaisilla komponenteilla ei ole kovin käytännöllistä. Liiketila voidaan tehokkaammin hallita paikallisen koordinaatiston avulla. Tämä koordinaatisto muodostuu ortonormaalista vektorikolmikosta so. käyrän pisteeseen sijoitetuista yksikkötangentista, yksikkönormaalista ja yksikköbinormaalista. Tämä koordinaatisto on kappaleessa 2.1 esitetty objektin koordinaatisto. Yksikkövektoreiden suunnat valitaan seuraavasti: yksikkötangentti $\mathbf{T}$ osoittaa käyrän tangentin suunnan kasvavan parametrin suuntaan, yksikkönormaali $\mathbf{N}$ osoittaa oskuloivassa tasossa sen suunnan, johon käyrä on kovera eli konkaavi. Oskuloiva taso on taso, jolla on käyrän pisteessä kaikista mahdollisista tasosta korkein mahdollinen kosketusaste käyrän kanssa. Tämä tarkoittaa sitä, että käyrän ja sen tasolle muodostetun projektiokäyrän väliset etäisyydet kyseisen pisteen läheisyydessä ovat pienimmät mahdolliset. Yksikköbinormaali $\mathbf{B}$ muodostaa edellisten kanssa oikeankäden systeemin ja voidaan laskea edellisten ristitulona $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$.

Kinematiikassa yksikkötangentti ilmaisee kappaleen nopeuden suunnan, yksikkönormaali kappaleen normaalikiihtyvyyden eli keskeiskiihtyvyyden suunnan sekä binormaali kappaleen kiertoakselin suunnan.

Yhtälön ?? mukaan $\frac{ds}{dt} = |\dot{\mathbf{r}}(t)|$, joten

$$|\mathbf{r}'| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = \frac{|\dot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|} = 1$$

Edellä oleva merkitsee, että kaarenpituuden suhteen muodostetun käyrän $\mathbf{r}(s)$ derivaatta $\mathbf{r}'(s)$, jos se on olemassa, on yksikkövektori. Yksikkötangentti

jokaisessa käyrän säännöllisessä pisteessä s voidaan siten määritellä yhtälöllä

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{r}'(s). \quad (2)$$

Käyrän $\mathbf{r}(t)$ säännöllisessä pisteessä on $\dot{\mathbf{r}}(t)$ käyrän tangentin suuntainen vektori. Täten yksikkötangentti yleisen parametrin t tapauksessa voidaan määritellä yhtälöllä

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|}. \quad (3)$$

Yksikkövektorit $\mathbf{X}(s)$ muodostavat käyrän $\mathbf{r}(s)$ *vektorikentän* eli funktion, joka liittää jokaista arvoa s kohti Euklidisessä avaruudessa $\mathbf{R}^3$ määritellyn yksikkövektorin $\mathbf{X}(s)$ (tai vastaavasti vektorin $\mathbf{X}(t)$ käyrälle $\mathbf{r}(t)$). Yksikkövektoreiden $\mathbf{X}$ tai itse asiassa kaikkien sellaisten vektoreiden, joilla $|\mathbf{X}| = \text{vakio}$, vektorikenttään liittyy seuraava tärkeä ominaisuus.

Jos $\mathbf{X}(s)$ on sellainen käyrän $\mathbf{r}(s)$ vektorikenttä, jolle $|\mathbf{X}| = \text{vakio}$, niin $\mathbf{X}(s)$ ja $\mathbf{X}'(s)$ ovat keskenään ortogonaaliset. Nimittäin, jos $\mathbf{X} \cdot \mathbf{X} = \text{vakio}$, niin

$$\frac{d}{ds} \mathbf{X} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X}' \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X}' \cdot \mathbf{X} = 0,$$

joten pistetulon vaihdannaisuuden perusteella

$$\mathbf{X}' \cdot \mathbf{X} = 0.$$

Derivoimalla käyrän yksikkötangentti $\mathbf{T} = \mathbf{r}'(s)$ kaarenpituuden s suhteen saadaan käyrän normaalivektori $\mathbf{n} = \mathbf{r}''(s)$. Voidaan osoittaa, että $\mathbf{r}'(s)$ ja $\mathbf{r}''(s)$ sijaitsevat oskuloivassa tasossa siten, että edellinen (tangentti) osoittaa kasvavan parametrin suuntaan ja jälkimmäinen (normaali) osoittaa kohtisuorassa tangenttiin nähden käyrän konkaaviin suuntaan. Käyrän yksikkönormaali $\mathbf{N}(s)$ voidaan siten määritellä yhtälöllä

$$\mathbf{N}(s) = \frac{\mathbf{r}''(s)}{|\mathbf{r}''(s)|}, \quad (4)$$

kun $|\mathbf{r}''(s)| \neq 0$.

Koska myös $\mathbf{T}(t)$ ja $\dot{\mathbf{T}}(t)$ ovat kohtisuorassa, voidaan yksikkönormaali $\mathbf{N}(t)$ määritellä yleisen parametrin t tapauksessa yhtälöllä

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\ddot{\mathbf{r}}(t)|}, \quad (5)$$

kun $|\dot{\mathbf{r}}(t)| \neq 0$.

Yksikköbinormaali saadaan molempien parametrien tapauksessa ristitulolla

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$

Esimerkki Lasketaan yksikkötangentit edellisessä esimerkissä määritellyn käyrän molemmista ekvivalenteista esityksistä pisteessä $t = \frac{\pi}{2}$.

$$\mathbf{r}(t) = \{3 \cos 2t, 3 \sin 2t, 8t - 4\}$$

$$\mathbf{r}(s) = \{3 \cos \frac{s}{5}, 3 \sin \frac{s}{5}, -4 + 4\frac{s}{5}\},$$

missä $s = 10t$.

Yhtälön ?? mukaan

$$\mathbf{T}(\frac{\pi}{2}) = \{-\frac{3}{5} \sin \frac{s}{5}, \frac{3}{5} \cos \frac{s}{5}, \frac{4}{5}\}_{|_{s=\frac{10\pi}{2}}} = \{0, -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\}$$

Yhtälön 3 mukaan

$$\mathbf{T}(\frac{\pi}{2}) = \frac{\{-6 \sin 2t, 6 \cos 2t, 8\}}{\sqrt{64 + 36 \cos^2 2t + 36 \sin^2 2t}}_{|_{t=\frac{\pi}{2}}} = \{0, -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\}$$

2.3 Käyrän kaarevuus kaarenpituuden funktiona

Yksikkötangentin ja -normaalin määrittelyistä seuraa suoraan

$$\frac{d}{ds}\mathbf{T}(s) = |\mathbf{r}''(s)|\mathbf{N}(s) \quad (6)$$

Kerroin $|\mathbf{r}''(s)|$ ilmaisee **yksikkötangentin suunnan muutosnopeuden itseisarvon kaarenpituuden suhteen**. Tätä arvoa kutsutaan käyrän *kaarevuudeksi* (curvature) ja merkitään κ . Yksikkötangentin muutosnopeuden suunta on aina yksikkönormaalin suuntainen. Siten käyrän kaarevuudelle saadaan yhtälö

$$\kappa(s) = |\frac{d\mathbf{T}(s)}{ds}| = |\mathbf{r}''(s)| \quad (7)$$

Jokaisessa käyrän $\mathbf{r}(s)$ säännöllisessä pisteessä kaarevuus on eienegatiivinen yksiköllinen reaaliluku. Kaarevuuden yksikkö muodostuu suunnanmuutoksen yksikön (rad) suhteesta pituusyksikköön. *Kaarevuussympyrä* eli oskuloiva

ympyrä käyrän pisteessä on sellainen ympyrä oskuloivassa tasossa, jolla on korkein mahdollinen kosketusaste käyrän kanssa ja vähintään niin korkea, että ympyrällä ja käyrällä on yhteinen yksikkötangentti kyseisessä pisteessä. Kaarevuusympyrän keskipistettä kutsutaan *kaarevuuskeskipisteeksi* ja sen sädettä *kaarevuussäteeksi*. Kaarevuusympyrä sijaitsee samalla puolella käyrää kuin yksikkönormali. Kaarevuusäde ρ määräytyy yhtälöllä

$$\rho = \frac{1}{\kappa}$$

2.4 Käyrän kaarevuus yleisen parametrin funktiona

Edellisessä kappaleessa laskettiin käyrän kaarevuudelle hyvin yksinkertainen kaarenpituudesta riippuva lauseke. Käytännössä käyrän kaarenpituutta ei välttämättä aina voida käyttää käyrän parametrina vaan kaarevuus on voitava laskea yleisen parametrin funktiona. Tämä onkin hieman hankalampi tehtävä.

Kappaleen liikuessa pitkin käyrää $\mathbf{r}(t)$, missä t merkitsee aikaa, on liikkuvan kappaleen nopeus- ja kiihtyvyyshvektorit $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ ja $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t)$.

Näiden vektoreiden komponentit ovat Euklidisen koordinaatiston koordinaattiakseleiden suuntaiset. Käyrän kaarevuuden laskemiseksi on kiihtyvyyshvektori esitettävä nopeuden suuntaisen komponentin eli yksikkötangentin (tangentialinen kiihtyvyys a_t) ja edellisen kanssa kohtisuorassa olevan yksikkönormaalin (normaalikiihtyvyys a_n) avulla ts.

$$\mathbf{a}(t) = a_t \mathbf{T}(t) + a_n \mathbf{N}(t).$$

Vaikka kiihtyvyydellä edellä onkin vain kaksi komponenttia, ne riittävät myös 3-ulotteisen käyrän kohdalla, sillä molemmat komponentit kuuluvat käyrän oskuloivaan tasoon. Kappaleen voidaan ajatella hetkellisesti liikkuvan pitkin oskuloivaa ympyrää, jolloin kappaleen liikettä voidaan tarkastella oskuloivan tason liikkeenä ja esittää kiihtyvyyshvektori kahden oskuloivan tason erisuuntaisen vektorin lineaariyhdistelmänä.

Edellä oleville komponenteille voidaan määrittää fysikasta tuttu esitys käyrän ja sen yksikkövektoreiden avulla.

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}' \frac{ds}{dt} = \mathbf{T} \frac{ds}{dt}.$$

Tällöin

$$|\mathbf{v}| = \frac{ds}{dt} = v.$$

Differentioimalla nopeuden lauseke ja huomioimalla yhtälöt 6 ja 6 saadaan

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \dot{v}\mathbf{T} + v\dot{\mathbf{T}} = \\ \dot{v}\mathbf{T} + v^2\mathbf{T}' &= \dot{v}\mathbf{T} + v^2\kappa\mathbf{N} = \\ \dot{v}\mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{N}.\end{aligned}$$

Eli saamme kiihtyvyydelle esityksen

$$\mathbf{a} = \dot{v}\mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{N}, \quad (8)$$

missä $\dot{v}$ on ratakiihtyvyyden eli ratanopeuden tangentialisen kiihtyvyyden ja $\frac{v^2}{\rho}$ on keskeiskiihtyvyyden suuruus.

Käyrän kaarevuus voidaan nyt määrittää yleisen parametrin käyräesityksestä laskemalla edellä olevien nopeus ja kiihtyvyydsvektoreiden ristitulo.

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \times \mathbf{a} &= v\mathbf{T} \times \left(\dot{v}\mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{N}\right) \\ v\dot{v}\mathbf{T} \times \mathbf{T} + \frac{v^3}{\rho}\mathbf{T} \times \mathbf{N} &= \frac{v^3}{\rho}\mathbf{T} \times \mathbf{N}.\end{aligned}$$

Huomioimalla että $\kappa = \frac{1}{\rho}$, $v = |\dot{\mathbf{r}}|$ ja $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ voimme kirjoittaa

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = \kappa |\dot{\mathbf{r}}|^3 \mathbf{B}$$

Ottamalla itseisarvot puolittain saamme kaarevuudelle alla olevan yhtälön.

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3} \quad (9)$$

3 Mallintaminen

3.1 Virtuaalisen liikkeen ohjausparametrit fysiikkamoduulissa

Moog liikealustan ympärille rakennetussa ohjelmistossa ilman fysikaalista mallinnusta on mahdollista "ajaa" kelkkaa maaston pinnalla, jolloin kelkan asento pyrkii noudattamaan pinnan vastaavia kaltevuusasentoja. Kussakin paikassa on mahdollista kelkkaan kiinnitetyn kameran avulla lukea kelkan alla olevan pinnan paikka- ja kaltevuustiedot, jotka syötetään liikealustalle. Asiakasrajapinnasta (kts. kappale 4.1) liikealustaa ohjataan liikeparametreilla, jotka on lueteltu alla olevassa luettelossa. Liikealusta palauttaa jokaisen sille lähetetyn ohjauspaketin paluuarvoina alustan tila- ja asentoinformaation.

Liikealustaparametrit (liikealustaohjelmiston toteutusdokumentin mukaan)

1. *a_z* pystysuuntainen kiihtyvyys ylös-alas $\frac{m}{s^2}$
2. *a_x* vaakasuuntainen kiihtyvyys eteen-taakse $\frac{m}{s^2}$
3. *a_y* vaakasuuntainen kiihtyvyys vasen-oikea $\frac{m}{s^2}$
4. *roll* sivuttaissuuntainen kallistuskulma vasen-oikea *rad*
5. *pitch* pituussuuntainen kallistuskulma eteen-taakse *rad*
6. *yaw* pituussuunnan kiertokulma vasen-oikea *rad*
7. *v_roll* sivuttaissuuntaisen kallistuksen kulmanopeus $\frac{rad}{s}$
8. *v_pitch* pituussuuntaisen kallistuksen kulmanopeus $\frac{rad}{s}$
9. *v_yaw* pituussuunnan kiertymisen kulmanopeus $\frac{rad}{s}$
10. *a_roll* sivuttaissuuntaisen kallistuksen kulmakiihtyvyys $\frac{rad}{s^2}$
11. *a_pitch* pituussuunnan kiertymisen kulmakiihtyvyys $\frac{rad}{s^2}$
12. *a_yaw* pituussuunnan kiertymisen kulmakiihtyvyys $\frac{rad}{s^2}$
13. *buffet_roll* isku sivuttaissuuntaisen kallistuksen suuntaan *rad*
14. *buffet_pitch* isku pituussuuntaisen kallistuksen suuntaan *rad*

15. *buffet_z* isku korkeussuunnassa m
16. *buffet_x* isku pituussuunnassa m
17. *buffet_yaw* isku pituussuunnan kiertymisen suunnassa rad
18. *buffet_y* isku sivuttaissuunnassa m
19. *v_vehicle* ajoneuvon nopeus $\frac{m}{s}$

Fysikaalisen mallintaminen suoritetaan kameran antamien virtuaalimaailman tietojen, systeemin juoksevan ajan ja kelkan kuljettajan antamien ohjausimpulssien perusteella. Fysiikkamoduuli vastaan ottaa liikealustan ohjausjärjestelmältä kelkan alapuolella olevan pinnan paikka- ja kaltevuustiedot eli maailmakoordinaatit x , y ja z sekä edellä olevat parametrit 3. ja 4., kuljettajan sijainnin kelkkaan nähden sekä järjestelmän juoksevan ajan t . Fysiikkamoduuli palauttaa tiedot edellä olevista liikeparametreista, jotka kuvaavat kelkan eli samalla kameran liiketilaan ja asentoon liittyviä tietoja. Lisäksi palautetaan kelkan paikkakoordinaatit maailmakoordinaatistossa. Fysiikkamoduulin toiminta on selostettu luvussa 4.

3.2 3D käyrän konstruointi

3.2.1 Kochanek-Bartelsin Cubic Spline konstruointitekniikka

Tässä luvussa konstruoidaan 3-ulotteinen spline-käyrä, joka yhdistää annetut pisteet $\{P_i\}_{i=1}^n$ ”pehmeästi” so. siten, että käyrä ja sen derivaatta pisteiden välillä on jatkuva. Konstruointiin käytetään 3D garfikassa geometrisessa mallintamisessa yleisesti käytettyä tekniikkaa, joka perustuu Kochanek-Bartelsin yleisempään TCB Spline käyrän konstruointitekniikkaan. Kirjaimet T, C ja B tulevat sanoista **Tension** (jännitys), **Continue** (jatkuvuus) ja **Bias** (vinous tai taipuneisuus), jotka vapaasti tulkittuna ilmaisevat miten jatkuva käyrä kaareutuu kiinnitettyjen pisteiden välillä ja taipuu pisteiden kohdalla. Seuraavassa kuvataan lyhyesti David Eberlyn sivulla

<http://www.magic-software.com/Documentation/KBSplines.pdf>
oleva esitys konstruointitekniikan periaatteista.

Konstruoinnissa tarvitaan kappaleen peräkkäisiin koordinaatiston paikkaan ja liiketilaan liittyvät suureet

$$\{t_i, \mathbf{P}_i, \mathbf{T}_i^I, \mathbf{T}_i^O\}_{i=1}^n,$$

missä

t_i on ajanhetki

$\mathbf{P}_i$ on kappaleen paikkavektori ajanhetkellä t_i

$\mathbf{T}_i^I$ on kappaleen ratakäyrän paikkaan $\mathbf{P}_i$ tuleva tangenttivektori

$\mathbf{T}_i^O$ on kappaleen ratakäyrän paikasta $\mathbf{P}_i$ lähtevä tangenttivektori

Paloittain määritrelty spline käyrä konstruoidaan esittämällä se yleisten vektori-arvoisten kertoimien

$\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i$ ja $\mathbf{D}_i$ avulla

$$\mathbf{r}_i(t) = \mathbf{A}_i + \left(\frac{t - t_i}{\Delta_i} \right) \mathbf{B}_i + \left(\frac{t - t_i}{\Delta_i} \right)^2 \mathbf{C}_i + \left(\frac{t - t_i}{\Delta_i} \right)^3 \mathbf{D}_i, \quad (10)$$

missä $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$. Vektori-arvoiset kertoimet voidaan määrittää ratkaisemalla yhtälöryhmä, joka syntyy käyrän ja sen derivaatan jatkuvuuteen liittyvistä vaatimuksista:

$$\mathbf{r}_i(t_i) = \mathbf{P}_i, \mathbf{r}_i(t_{i+1}) = \mathbf{P}_{i+1}, \mathbf{r}'_i(t_i) = \mathbf{T}_i^O \text{ ja } \mathbf{r}'_i(t_{i+1}) = \mathbf{T}_{i+1}^I$$

Alkuehdoista saadaan yhtälöryhmät

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{P}_i$$

$$\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i + \mathbf{C}_i + \mathbf{D}_i = \mathbf{P}_{i+1}$$

$$\mathbf{B}_i = \Delta_i \mathbf{T}_i^O$$

$$\mathbf{B}_i + 2\mathbf{C}_i + 3\mathbf{D}_i = \Delta_i \mathbf{T}_{i+1}^I$$

ja yhtälöryhmän ratkaisuna

$$\text{kertoimet} \quad (11)$$

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{P}_i$$

$$\mathbf{B}_i = \Delta_i \mathbf{T}_i^O$$

$$\mathbf{C}_i = 3(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i) - \Delta_i(2\mathbf{T}_i^O + \mathbf{T}_{i+1}^I)$$

$$\mathbf{D}_i = -2(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i) + \Delta_i(\mathbf{T}_i^O + \mathbf{T}_{i+1}^I)$$

Käyrä 10 varustetuna kertoimilla 11 muodostaa nyt pisteiden $\mathbf{P}_i$ kautta kulkevan kappaleen ratakäyrän, kunhan tangentit $\mathbf{T}_i^O$ sekä $\mathbf{T}_i^I$ voidaan määrittää.

Kun käyrällä ei oleteta olevan erityisiä jännitys- tai taipumisominaisuuksia, voidaan tangentit valita siten, että kussakin pisteessä tuleva ja lähtevä tangentti ovat samat. Lisäksi voidaan valita tangenttivektorit siten, että kaikissa pisteissä $\mathbf{P}_i$ tangentti on yhdensuuntainen viereisten pisteiden $\mathbf{P}_{i-1}$ ja $\mathbf{P}_{i+1}$ välisen sekanttivektorin kanssa. Tangenttivektoreille voidaan edellä olevan mukaan määrittää yhtälöt

$$\mathbf{T}_i^I = \mathbf{T}_i^O = \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{P}_{i+1} - \mathbf{P}_i)}{\Delta_i} + \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{i-1})}{\Delta_{i-1}} \quad (12)$$

3.2.2 3D käyrän konstruointi

Seuraavassa tarkastellaan 3D spline käyrän konstruointia Mathematicalla sekä havaintopisteisiin liittyvien ajankohtien merkitystä käyrän ominaisuuksiin. Kaikki Mathematicassa suoritettavat määrittelyt esitetään *eps* -kuvina Mathematican omalla notaatiolla.

Testiaineistona käytetään 3-ulotteisen avaruuden pintaa ja pinnalle määritettyä pistejonoa, joka muodostaa oletetun ajoreitin kuva (2).

```
In[5]:= testSurface = {x, y, 4 Sin[0.1 x y] Cos[0.1 x y]}
pos = Table[testSurface /. y -> x, {x, 0, 6}]
timeP = {0.0, 0.15, 0.3, 0.45, 0.60, 0.75, 0.90}
intv = Table[timeP[[i + 1]] - timeP[[i]], {i, 1, Length[timeP] - 1}]
```

Kuva 2: Testipinta

Pisteiden määrittämät tangentit ja niiden perusteilla konstruoitava 3D spline käyrä saadaan alla olevilla määrittelyillä sisäpisteiden muodostamilla väleillä (kuva 3).

Kuvassa (4) on tulostettu konstruoitu Spline käyrä reittipisteiden yhteyteen. Kuvassa (5) on esitetty lisäksi testauspinta.

Spline käyrä kulkee määrittelynsä perusteella aina havaintopisteiden kautta, mutta niiden väliset arvot interpoloidaan. Itse asiassa pisteiden välisellä maastolla ei ole mitään vaikutusta splinekäyrän kaarevuuksiin pisteiden välillä, vaan sen määrää täysin parametrin t arvot. Edellisissä kuvissa havain-

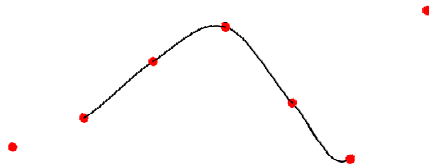

```

In[11]:= tangents = Table[ $\frac{1}{2} \left( \frac{(\text{pos}[[i]] - \text{pos}[[i-1]])}{\text{intv}[[i-1]]} + \frac{(\text{pos}[[i+1]] - \text{pos}[[i]])}{\text{intv}[[i]]} \right)$ ,
{ i, 2, Length[timeP] - 1}] // Chop

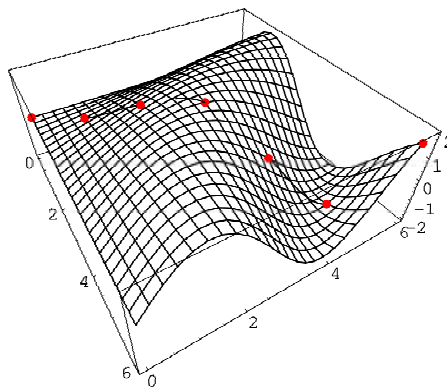
splnF = Table[pos[[i+1]] + (t - timeP[[i+1]]) tangents[[i]] +
 $\left( \frac{(t - \text{timeP}[[i+1]])}{\text{intv}[[i+1]]} \right)^2 (3 (\text{pos}[[i+2]] - \text{pos}[[i+1]]) -$ 
intv[[i+1]] (2 tangents[[i]] + tangents[[i+1]])) +
 $\left( \frac{(t - \text{timeP}[[i+1]])}{\text{intv}[[i+1]]} \right)^3 (-2 (\text{pos}[[i+2]] - \text{pos}[[i+1]]) +$ 
intv[[i+1]] (tangents[[i]] + tangents[[i+1]])),
{ i, 1, Length[timeP] - 3}] // Chop

```

Kuva 3: Spline käyrän määrittäminen



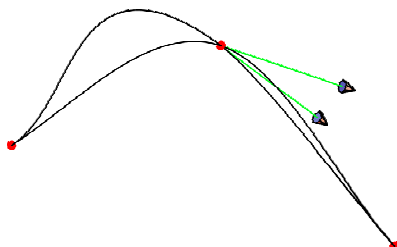
Kuva 4: Spline käyrä ja pisteet



Kuva 5: Spline käyrä ja pinta

topisteiden väliset ajanjaksot olivat kaikki yhtä pitkiä. Mikäli joidenkin havaintopisteiden välinen aikaväli pitenee suhteessa seuraavaan väliin, aiheut-

taa tämä käyrän taipumisen välien yhteisessä pisteessä siten, että pitemmän aikavälin käyrän osan pituus kasvaa suhteessa lyhempään.



Kuva 6: Parametrin t (aika) vaikutus käyrään

Kuvassa (6) on kuvattu kuvan (5) splinekäyrä lisäksi spline käyrä, joka on konstruoitu siten, että 3. ja 4. havaintopisteiden välistä aikaväliä on pienennetty kolmannekseen aikaisemmasta. Tämä aiheuttaa 3. välin käyrän osalle lisää "väljyyttä" kun taas 4. väli "kiristyy" eli tämä käyrän osa kuljetaan nopeammin. Yksikkötangentin suunta havaintopisteissä riippuu siis parametrin t (aika) arvoista eikä ole välttämättä saman suuntainen spline käyrän konstruoinnissa käytettyjen havaintopisteiden avulla määriteltujen tangenttien kanssa .

3.3 Kelkan ilmalennon mallintaminen

Kelkan irtautuminen pintakosketuksesta voidaan fysikaalisesti määrittää pelkästään ajolinjan kaarevuuden ja kelkan nopeuden avulla. Kelkan liikettä voidaan hetkellisesti tarkastella oskuloivassa tasossa liikkeenä pitki ympyräradan kaarta. Kappale pysyy ympyräradalla, jos on voimassa

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}_n,$$

missä $\sum \mathbf{F}$ on kappaleeseen vaikuttavien voimien kaarevuusympyrän keskipisteeseen osoittava komponentti, m on kappaleen massa ja $\mathbf{a}_n$ keskeiskiihtyvyys, jonka suuruus lasketaan kaavalla $a_n = \frac{v^2}{\rho}$. Rajatapauksessa, kun kelkka on juuri irtautumassa pinnasta ja tukivoimat ovat nolliä, keskeisvoima muodostuu ainoastaan gravitaatiovoiman keskeiskiihtyvyyden suuntaisesta komponentista. Tällöin saadaan ehto: kelkka irtautuu pintakosketuksesta, jos pinta

on ylöspäin kupera ja

$$mg_{a_n} < m \frac{v^2}{\rho}$$

eli

$$g_{a_n} < \frac{v^2}{\rho}. \quad (13)$$

Ajolinjan kaarevuudet ja vastaavat kaarevuussäteet voidaan laskea konstruoidun spline funktion avulla (kuva 7).

```
κ = Table[{√((D[splnF[[i]], t] × D[splnF[[i]], {t, 2}]) .
            (D[splnF[[i]], t] × D[splnF[[i]], {t, 2}]))} /
            (√D[splnF[[i]], t] . D[splnF[[i]], t])3 /.
            t → timeP[[i + 1]], {i, 1, Length[splnF]}]

ρ = Map[#-1 &, κ]
```

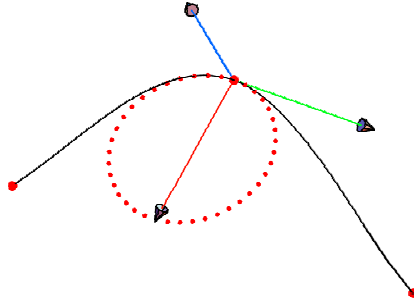
Kuva 7: Kaarevuus ja kaarevuussäde

```
unitTangent = D[splnF[[2]], t] / √D[splnF[[2]], t] . D[splnF[[2]], t]
uTan = unitTangent /. t → timeP[[4]]
uNorm =
  D[unitTangent, t] / √D[unitTangent, t] . D[unitTangent, t] /. t → timeP[[4]]
uBin = uTan × uNorm // Chop
```

Kuva 8: Yksikkövektoreiden laskeminen

Kaarevuuden suunnan eli keskeiskiihtyvyyden suunnan kertoo yksikkönormaali. Kuvassa (9) on esitetty spline käyrän yhteyteen pisteeseen 4. piirretty kaarevuusympyrä sekä yksikkötangentista, yksikkönormaalista ja yksiköbinormaalista muodostuva objektin koordinaatisto. Yksikkövektorit on määritetty kuvan (8) mukaisesti.

Kelkan irtautuminen voidaan määrittää nyt kuvan (10) laskennan avulla. Mikäli kelkka irtautuu pinnasta, voidaan ilman suurempaa virhettä laskea kelkan ilmarata ilmanvastuksettomon heittoliikkeen periaatteella (kuvat 11 ja 12).



Kuva 9: Objektin koordinaatisto

```
In[269]:= vVehicle = D[splnF[[2]], t] /. t -> timeP[[4]]
gravAcc = {0, 0, -9.81}
accNorm =  $\frac{vVehicle^2}{\rho[[2]]}$  uNorm
gravToAccNorm =  $\frac{gravAcc.accNorm}{\sqrt{accNorm.accNorm}}$ 
If[accNorm[[3]] < 0 && gravToAccNorm <  $\sqrt{accNorm.accNorm}$ ,
  flying = True, flying = False]
```

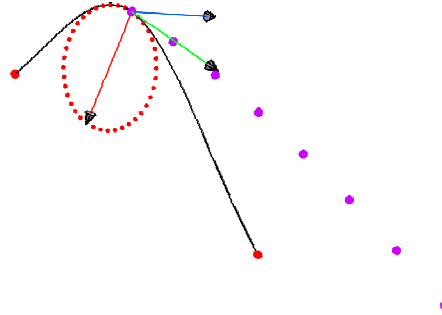
Kuva 10: Kelkan irtautumisen tutkiminen Mathematicalla

```
airPos =
Table[Table[pos[[4]][[i]] + vVehicle[[i]] time +  $\frac{1}{2}$  gravAcc[[i]] time2,
  {i, 1, 3}], {time, 0, 0.35, 0.05}]
```

Kuva 11: Ilmalentoradan laskeminen

Ilmalennon aikana myös kelkan kulmaparametrit muuttuvat. Kelkka kulkee koko ilmalennon aikana ratakäyrän tangentin suuntaan kun lento projisoidaan xy-tason suuntaisesti. Kelkan mahdollista sivuttaiskääntymistä kelkan normaalin eli akselin z suhteen ei tapahtune käytännössä, joten $v_{yaw} = 0$ sekä $a_{yaw} = 0$. Kelkan kallistuminen ratakäyrän tangenttiin nähden poikkittaisessa suunnassa jatkuu tasaisena, jolloin $v_{roll} = \text{vakio}$ ja on yhtäsuuri kuin se on irtoamishetkellä sekä $a_{roll} = 0$.

Ilmalennon aikana on kuljettajalla mahdollisuus vaikuttaa kelkan pituus-



Kuva 12: Kelkan ilmalento

suuntaiseen kulma-asentoon ilmassa. Kyseeseen tulee todellisuudessaakin käytetty kelkan *pitch* kulman muuttaminen jarrulla ja kaasulla. Tämä mahdollistaa suotuisemman alastuloasennon etsimisen ilmalennon aikana. Mikäli vetohihnan pyörimisnopeus säilyy vakiona, säilyy myös kelkan kulmanopeus v_{yaw} vakiona. Kuljettajan jarruttaessa tai kiihdyttäessä hihnan pyörimisnopeus muuttuu. Tällöin jarrujen tai moottorin hihnalle antama momentin impulssi on yhtäsuuri kuin kelkan saama vastakkainen momentin impulssi eli liikemäärämomentti säilyy koko systeemillä (kuljettaja ei ole kiinteästi kiinni, joten se voidaan jättää pois tarkastelusta). Alustan parametri $v_{vehicle}$ merkitsee hihnan ratanopeutta ja a_x sen tangentiaalista kiihtyvyyttä. Olkoon J_h hihnan ja J_k kelkan hitausmomentit ja vastaavasti α_h ja α_k vastaavat kulmakiihtyvyydet. Tällöin hihnan ja kelkan momentin impulsseille on voimassa

$$J_h \alpha_h \Delta t = J_k \alpha_k \Delta t.$$

Edellisestä saadaan johdettua kelkan kulmakiihtyvyydelle lauseke

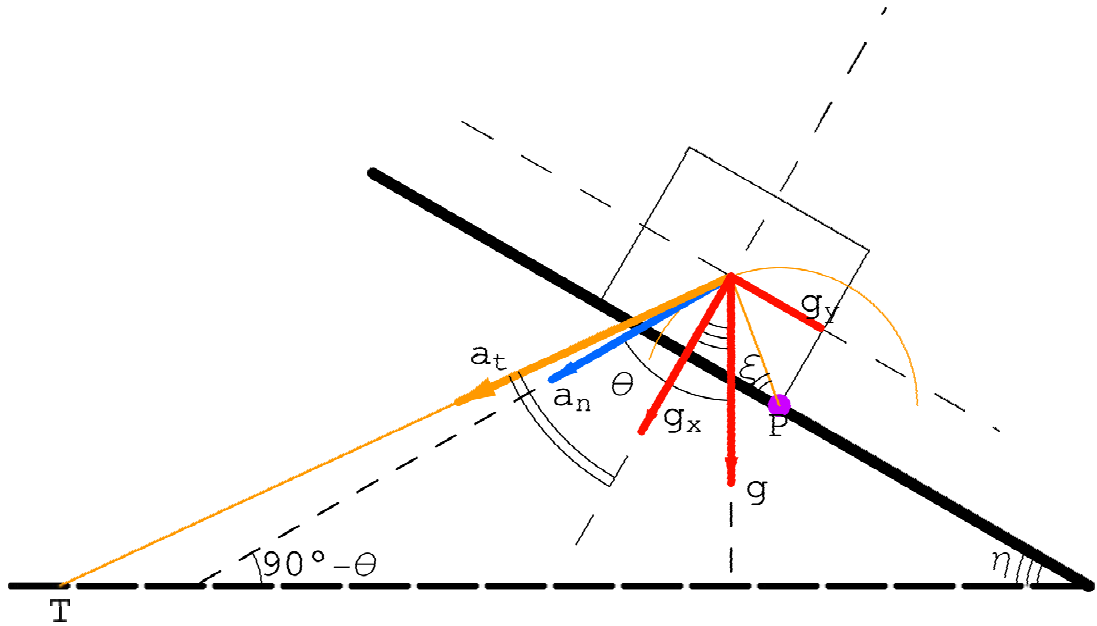
$$\alpha_k = \frac{J_h}{J_k} r_h a_x,$$

missä r_h on vetohihnan pyöriyssäde. Kelkan kulmakiihtyvyys saadaan siis laskettua kelkan liikeparametrista a_x vakiolla kerrottuna.

3.4 Kelkan kallistumisen mallintaminen

Toisin kuin irtautuminen pintakosketuksesta on kelkan kallistumisen mallintaminen monimutkaista. Kallistumisen alkaminen riippuu kelkan geometrian ja hitausmomentin lisäksi niin maastosta kuin ajolinjasta sekä -ei missään tapauksessa vähäisimmin- kuljettajan painopisteen paikasta kelkkaan nähden.

Mallintamisessa ajajaa tarkastellaan jäykän kappaleen tavoin mikä luonnollisesti on kaukana todellisuudesta. Elastisen kuljettajan impulsiivinen liikedintä kelkan päällä on käytännössä kelkan käyttäytymiseen eniten vaikuttava seikka. Tässä dokumentissa tyydytään esittämään vain jäykän kappaleen eli kelkan kallistumisen riippuvuus ajolinjasta ja maaston kaltevuudesta. Kuljettajan painopisteen vaikutusta käsitellään lyhyesti.



Kuva 13: Kelkan kallistuminen

Tarkastellaan ensin tilannetta, jossa kelkka alkaa kallistua kaltevaan pintaan nähden alarinteen puolelle (kuva 13). Tässä sovitaan, että kiertyminen vastapäivään kelkan nopeuden suunnasta eli yksikkötangentin suunnasta katsottuna on positiivinen. Kelkan sivuttaissuuntainen kaltevuuskulma *roll* on pintakosketuksessa sama kuin pinnan vastaava kulma (tässä negatiivinen edellisen sopimuksen nojalla). Rajatilanteessa kiertymiseen vaikuttavat tukivoimat ovat nollia, jolloin kelkan sivuttaissuuntaisen kiertymisen kulmakiihtyvyyteen α vaikuttaa ainoastaan kelkan painovoima. Jotta kelkan molemmat sivut pysyisivät pintakosketuksessa, tulee painovoiman aiheuttaman kulmakiihtyvyyden arvon tukipisteen P suhteen olla itseisarvoltaan niin suuri, että se riittää pitämään kelkan massakeskipisteen ajolinjan mukaisella kaarevuuskäyrällä.

Seuraavassa merkitään

θ =suunnattu kulma $\angle(\mathbf{a}_n, \mathbf{g})$

η = kelkan pohjan sivuttaissuuntainen kiertyminen (= |kelkan *roll*|) vaakatasoon nähden

$\xi = \arctan(\frac{y}{x})$, missä x ja y ovat kelkan massakeskipisteen etäisyydet sivupinnoista, kun kelkka pidetään suorakulmaisena särmiönä.

Edellä olevien kulmien rajoitukset: $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\eta \in [0, \frac{\pi}{2} - \xi]$ ja käytännössä $\xi \in (0, \frac{\pi}{4}]$. Kulman θ merkin määrää vektoreiden $\mathbf{a}_n$ ja $\mathbf{g}$ keskinäinen järjestys sovitussa kiertosuunnassa. Kuvassa (13) on $\theta > 0$.

3.4.1 Kallistuksen alkamishdot

Kelkan kallistumisen ratkaisemiseksi pityää selvittää kulmakiihtyvyyden α ja keskeiskiihtyvyyden suuruuden $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ välinen yhteys. Kuvan (13) mukaan on määritettävä kulmakiihtyvyyttä α vastaavan tangentiaalisen kiihtyvyyden $\mathbf{a}_t$ keskeiskiihtyvyyden suuntainen komponentti $\mathbf{a}_{t_{an}}$. Kun tämä komponentti on suuruudeltaan pienempi kuin ajolinjan määräämä keskeiskiihtyvyyden suuruus, ei painovoima pysty enää pitämään kelkan massakeskipistettä ajolinjan mukaisella oskuloivan ympyrän radalla.

Vektoreiden $\mathbf{a}_n$ ja $\mathbf{a}_t$ välinen kulma voidaan laskea, kun huomioiodaan $\angle(\mathbf{g}_x, \mathbf{a}_t) = \xi$ ja $a_t = \alpha\sqrt{x^2 + y^2}$, jolloin

$$\varphi = \angle(\mathbf{a}_t, \mathbf{a}_n) = \xi - (\theta - \eta).$$

Kulma φ saa vaihdella välillä $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, jolloin on voimassa $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$. Tämä on myös riittävä vaihteluväli kulmalle todellisia kelkan kallistumislanteita ajatellen.

Kalliistumisen alkamisen ehdoksi saadaan nyt kuvan (13)mukaisessa tilanteessa

$$\begin{aligned} &\text{Kun } roll < 0, \theta > 0 \text{ ja } \alpha > 0, \\ &\left| \alpha\sqrt{x^2 + y^2} \cos(\xi - (\theta - \eta)) \right| < \frac{v^2}{\rho} \end{aligned} \quad (14)$$

Kun ajolinjan perusteella keskeiskiihtyvyyden suunta on alarinteen puolelle eli $\theta < 0$, pyrkii kelkka kallistumaan ylärinteen puolelle. Tällöin $\alpha < 0$ sekä

$$\varphi = \angle(\mathbf{a}_t, \mathbf{a}_n) = (\theta + \eta - \xi).$$

Kallistumisen alkamisen ehdoksi saadaan nyt

$$\text{Kun } roll < 0, \theta < 0 \text{ ja } \alpha < 0,$$

$$\left| \alpha \sqrt{x^2 + y^2} \cos(\theta + \eta - \xi) \right| < \frac{v^2}{\rho} \quad (15)$$

Kun tason kaltevuuden suunta vaihtuu, on kelkan $roll > 0$. Edellä olevat ehdot pätevät, kun ehdossa (14) kirjoitetaan

$$roll > 0, \theta < 0 \text{ ja } \alpha < 0$$

ja ehdossa (15) kirjoitetaan

$$roll > 0, \theta > 0 \text{ ja } \alpha > 0.$$

3.4.2 Kallistuksen kulmasuureet

Painovoiman kelkalle aiheuttama momentti tukipisteen P suhteen aiheuttaa kulmakiihtyvyyden α , jonka suuruus riippuu kelkan hitausmomentista J_k ko. tukipisteen suhteen sekä kelkan kaltevuuskulmasta η . Painovoiman tangentiaalisen kiihtyvyyden suuntainen komponentti kuvan (13) tilanteessa juuri kallistumisen alkaessa on $G_{a_t} = \cos(\eta + \xi)G$, joka aiheuttaa pyörimisliikkeen dynamiikan perusyhtälön mukaan kulmakiihtyvyyden

$$\alpha = -\frac{G \cos(\xi + \eta)}{J_k}. \quad (16)$$

Kun ajolinjan perusteella keskeiskiihtyvyyden suunta on alarinteen puolella eli $\theta < 0$ on kulmakiihtyvyys vastaavassa tilanteessa

$$\alpha = \frac{G \cos(\xi - \eta)}{J_k}. \quad (17)$$

Kaltevan tason tapauksessa, jossa pinnan kaltevuuskulma $roll > 0$, eo. yhtälöt pätevät, kun negatiivinen etumerkki vaihdetaan yhtälöstä 16 yhtälöön 17.

Kulmakiihtyvyys on yhtälöiden 16 ja 17 mukaan kulman $\eta = |roll|$ funktio. Kallistumisen aikaiset sivuttaissuuntaiset kelkan kaltevuuskulma $roll$ ja kulmanopeus v_{roll} voidaan laskea Eulerin menetelmän mukaisesti. Alkuehdot $roll_0$ ja v_{roll_0} saadaan fysiikkamoduulin ylläpitämästä liiketilan historiasta. Kulmakiihtyvyyden alkuehdoksi kuvan (13) tapauksessa tulee

$$\alpha_0 = -\frac{G \cos(\xi + |roll_0|)}{J_k} \quad (18)$$

Kallistumisen aikana suoritetaan seuraavat laskennat kullakin moduulin ajokerralla:

$$\begin{aligned} roll_{i+1} &= roll_i + \Delta_i v_roll_i, \\ v_roll_{i+1} &= v_roll_i + \Delta_i \alpha_i, \\ \alpha_{i+1} &= -\frac{G \cos(\xi + |roll_{i+1}|)}{J_k} \end{aligned}$$

missä $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$.

3.4.3 kelkan kaatuminen

Mahdollista kelkan katumista heti kallistuksen alettua voidaan tutkia energiaperiaatteella. Mikäli kelkan pyörimisenergia tukipisteen P suhteen on suurempi kuin se potentiaalienergialisäys, joka kellelle tulee sen kiertyessä tukipisteen ympäri ylimpään asentonsa eli labiiliin tasapainoasemaan, kelkka katuu. Voimme siis kirjoittaa kelkan katumisehdon

$$\frac{1}{2} J_k v_roll_0^2 > mg\Delta h. \quad (19)$$

Kuvan (13) tapauksessa

$$\Delta h = \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} \sin(\eta + \xi) = (1 - \sin(\eta + \xi))\sqrt{x^2 + y^2}. \quad (20)$$

Kun ajolinjan perusteella keskeiskiihtyvyyden suunta on alarinteen puolella eli $\theta < 0$, on

$$\Delta h = \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + y^2} \sin(\xi - \eta) = (1 - \sin(\xi - \eta))\sqrt{x^2 + y^2}. \quad (21)$$

Kun kaltevan tason kaltevuuskulma $roll > 0$, eo. yhtälöt pätevät päinvastaisessa järjestyksessä kulman θ etumerkin suhteen.

3.4.4 Kuljettajan vaikutus

Kuljettajan vaikutusta kelkan sivuttaissuuntaiseen liiketilaan voidaan osittain mallintaa tulkitsemalla kuljettaja kelkkaan kiinnitetyksi jäykäksi kappaletta. Kuljettajan paikkaa kelkan yläpuolella voidaan virtuaalilaboratoriossa

seurata tiettyjen kamerajärjestelyjen avulla siten, että kamera lukee kuljettajan arvioidun massakeskipisteen paikan sivu- ja korkeussuuntaiset koordinaatit. Kuljettajan vaikutus kelkan hitausmomenttiin voidaan arvioida Steinerin säännöllä

$$J_k^* = m' a^2,$$

missä m' on kuljettajan massa ja a on kuljettajan massakeskipisteen etäisyys painopisteestä P . Edellisissä laskuissa tulee kelkan massa m korvata kelkan ja kuljettajan yhteisellä massalla $m + m'$ ja J_k tulee lisätä yo. yhtälön määrittämä kuljettajan hitausmomentti.

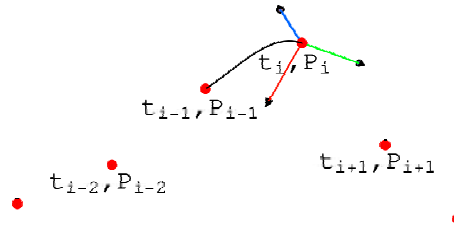
4 Fysiikkamoduuli

4.1 Toimintaympäristö

Fysiikkamoduulin mallinnus alkoi syksyllä 2003 tilanteessa, jossa käytettävissä oli ainoastan tieto kappaleessa 3.1 esitetyistä liikeparametreista sekä periaatteesta, että kelkka pystyy olemassa olevan ohjelmiston perustella liukumaan virtuaaliympäristössä kuljettajan ohjaamana noudattaen täydellisesti pinnan kaltevuuksia. Kelkkaan kiinnitetty kamera pystyy lukemaan suoraan kelkan alapuolella olevan pinnan paikallisen koordinaatiston mukaiset kaltevuustiedot ja välittämään ne liikealustalle. Liikealustan ohjausjärjestelmä ylläpitää tiedot edellä mainittujen liikeparametrien arvoista. Lisäksi järjestelmältä saadaan mittaushetken juokseva aika.

Keväällä 2004 ilmestyneen liikealustaohjelmiston toteutusdokumentin mukaan Moog liikealustan ympärille rakennettu toiminnallinen kokonaisuus koostuu liikealustasta, serveristä ja simulaattorista. Tätä kokonaisuutta ohjaa ohjelmisto, joka koostuu kahdesta osasta serveriohjelmistosta, joka huolehtii kaikista liikealustan toimintatiloista, sekä asiakasrajapinnasta, joka normaalisti on liitetty simulaattoriin. Serveriohjelmisto kuntelee simulaattorilta tulevia viestejä, joiden perusteella ohjaa liikealustaa. Tässä dokumentissa ei suunnitella fysiikkamoduulin toimintaa asiakasrajapinnan ja serverin muodostamassa ohjelmistokokonaisuudessa muilta osin kuin yhteisen rajapinnan osalta.

Kappaleessa 3.1 tuli jo esille alustavasti fysiikkamoduulin toiminta kokonaisuuden osana. Oleellista on se, että fysiikkamoduuli mallintaa kelkan liikettä annettujen maaston pintatietojen, systemiltä saadun ajan ja kelkan kuljettajan antamien ohjausimpulssien perusteella. Tällöin fysiikkamoduuli ei ennusta kelkan tulevaa liikettä vaan se ainoastaan pyrkii korjaamaan kelkan liiketi-



Kuva 14: Mallinnuksen ympäristö

lan vastaamaan todellisuutta nykyisestä alustan toimintaperiaatteesta, jossa kelkka liikkuu kaikissa tilanteissa täydellisessä pintakosketuksessa. Vain siinä tapauksessa, että kelkka on ilmassa tai kallistunut, fysiikkamoduuli huolehtii kokonaan kelkan liiketilan määrittämisestä kuljettajan antamien ohjausimpulssit huomioimalla.

Kuva 14 havainnollistaa perustilannetta, jossa fysiikkamoduuli on saanut syötteenä kelkan oletetun seuraavan ympäristön P_{i+1} tilan ajanhetkellä t_{i+1} . Moduuli palauttaa kelkan todellisen liiketilan ympäristössä P_i . Käytännössä tällä viiveellä ei liene havaittavaa merkitystä kelkan liiketilan tuntemukseen, koska liikealustaohjelmiston toteutusdokumentin mukaan liikealustalle tulee lähettää noin 60-100 ohjauspakettia sekunnissa, jolloin kahden syötepaketin välinen aikaero on luokkaa 10 ms - 17 ms. Tätä kirjoitettaessa fysiikkamoduulin toimintaa ei ole vielä testattu liikealustalla

Liikealustan toteutusdokumentissa ei kuvata periaatetta miten kameran lukema seuraava ympäristötila P_{i+1} määräytyy vaan ainoastan miten se välitetään liikealustalle. Tähän ympäristötilaan vaikuttavat oleellisesti kuljettajan antamat impulssit ratin, jarrun ja kaasun asennoista. Seuraavassa oletetaan, että liikealustaohjelmistossa ennen fysiikkamoduulin kutsua on kuljettajan antamien ohajustietojen perusteella laskettu ja luettu kelkan oletettu seuraava ympäristötila ja sitä vastaava järjestelmän aika. Edellisen voisi kuvata myös siten, että aikaisemman mallin mukainen "haamukelkka" kulkee edelleen täydellisessä pintakosketuksessa suoraan maallinnetun kelkan alapuolella ja kertoo fysiikkamoduulille pintaan liittyvän informaation ja kuljettajan antamat ohjausimpulssit.

Fysiikkamoduuli ylläpitää kelkan liiketilahistoriaa ja huolehtii siten kelkan liiketilan määräytymisestä siinä tapauksessa, jolloin kelkka ei liu'u täysin pintakosketuksessa. Mallinnus toteutetaan neljän viimeisen kelkan liiketilaan

liittyvän syöteinformaation perusteella. Tilanteessa jossa kelkka on kokonaan irtautunut pintakosketuksessa malinnetaan syöteinformaatiosta ainoastaan ratakäyrän projektio kelkan alapuolisella pinnalla. Tällöin kelkan joutuessa ilmalennon jälkeen uudelleen pintakosketukseen, on ratakäyrä heti käytettävissä.

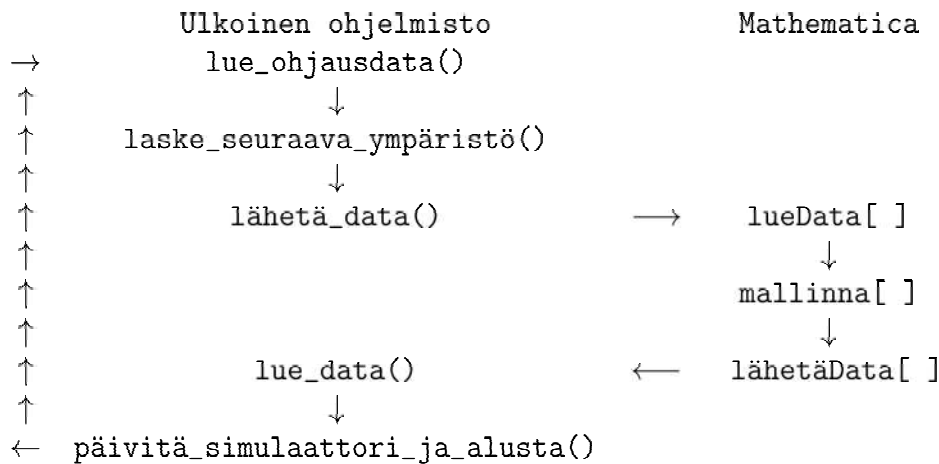
Fysiikkamoduulin ja liikealustaohjelmiston välisen tiedonsiirron hoitaa Mathematican mukana tuuleva MathLink ohjelmisto. Math Link ohjelmisto tarjoaa yleisen rajapinnan Mathematican ja ulkoisen ohjelman väliselle yhteistoiminnalle seuraavilla tavoilla (MathLink ohjelmiston yksityiskohtaisempi tarkastelu ei kuulu tämän dokumentin aihepiiriin):

- mathematicasta kutsutaan ulkoisen ohjelman funktioita
- ulkoisesta ohjelmasta kutsutaan Mathematican funktioita
- ulkoisesta ohjelmasta käsin astetaan Mathematicaan uusia käyttöliittymiä
- hoidetaan Mathematican ja ulkoisen ohjelman välistä tiedonsiirtoa
- hoidetaan kahden rinnakkain toimivan Mathematica-ohjelman välistä tiedonsiirtoa

Fysiikkamoduuli on toteutettu Mathematican ohjelmapakettina (Mathematica package), jota kutsutaan liikealustan ohjausohjelmistosta. Paketin kutsuminen käynnistää koneessa olevan Mathematican Kernel-ohjelman, joka evaluoi kutsuttavat funktiot.

4.2 Algoritmit ja funktiot

4.2.1 Fysiikkamoduulin toimintasilmukka ulkoisen ohjelmiston yhteydessä



Silmukan alussa Funktio `lueOhjausData()` laskee kelkan kuljettajan antamien ohjausimpulssien (kaasu, jarru, ratti) ja/tai mahdollisesti ilmalennon yhteydessä fysiikkamoduulin tuottamien ohjaustietojen perusteella kelkan seuraavaa sijaintia vastaavat pinnan paikka- ja kaltevuustiedot.

Fysiikkamoduuli ottaa vastaan 11 parametria: kelkan alapuolisen pinnan $x, y, z, roll$ ja $pitch$ parametrien arvot, kelkan suunta yaw , kaasun ja jarrun asento, kuljettajan massakeskipisteen paikka kelkan poikittaissuuntaisessa tasossa dr_y ja dr_z ja mittaushetken ajankohta t .

Fysiikkamoduuli palauttaa liikeparametrien (19 kpl) arvot sekä kelkan ja samalla kameran maailmakordinaatiston paikkatiedot, joiden perusteella funktio `päivitäSimulaattoriJaAlusta()` ohjaa kameraa ja alustaa.

4.2.2 Fysiikkamoduulin toiminta-algoritmi ja funktiot

Fysiikkamoduuli alustetaan kutsumalla funktiota `initialize[]`, joka alustaa kaikki fysiikkamoduulin globaalit muuttujat.

Funktio `getData[]` ottaa vastaan ulkoiselta ohjelmalta reaalityyppisen listan, joka sisältää mallinnuksen tarvitsemat 11 parametria. Tämä funktio kutsuu liikehistorian päivitysfunktiota `update[]` sekä mallintamisen hoitavaa laskentafunktiota `calculate[]`. Lopulta evaluoidaan so. lähetetään ulkoiselle ohjelmalle `dataOut` lista, joka sisältää 22 kelkan liikeparametria.

```

getData[inList_] :=
  update[ ]
  ↓
  calculate[ ]
  ↓
  dataOut

```

Funktio `calculate[ ]` on laskennan pääalgoritmi.

```

calculate[inList_] :=
  splineFunction[ ]
  ↓
  If[flying==True,      fly[ ],
    ↓
    If[sliding==True,   slide[ ],
      ↓
      If[startFlying==True, getInitialValues[ ]
                                flying=True
                                slide[ ]
      ↓
      tilting==True
      tilt[ ]

```

Mallinnusfunktio `splineFunction[ ]` tutkii ratakäyrän kaareutuvuuden. Mikäli käyrä on suoraviivainen, saa muuttuja `sliding` arvon tosi. Käyräviivaisen ratakäyrän tapauksessa funktio laskee ratakäyrän kareutuvuuden ja paikalliset yksikkövektorit, joiden perusteella muuttujan `startFlying` arvo myöhemmin määräytyy. Jos kelkka on jo edellisellä evaluointikierroksella irtautunut ilmalentoon, on totuusmuuttujalla `flying` arvo tosi, jolloin kutsutaan suoraan funktiota `fly[ ]`. Mikäli totuusmuuttujalla `sliding` on arvo tosi, kutsutaan funktiota `slide[ ]`. Ratakäyrän ollessa kaareva ja pinnasta irtautumisen ehdot täyttyvät otetaan talteen kelkan paikan ja liiketilan alkuarvot ilmalentoradan laskemista varten, asetetaan muuttujalle `flying` arvo tosi ja kutsutaan vielä funktiota `slide[ ]`. Mikäli kelkka pysyy pintakosketuksessa, kutsutaan funktiota `tilt[ ]`.

Funktiot `slide[ ]`, `fly[ ]` ja `tilt[ ]` määrittävät kukin kelkan liikeparametrien arvot omissa liiketiloissaan. Funktioissa `fly[ ]` muuttuja `flying` saa arvon epätosi, jos lentoradan mukainen z -koordinaatti on pienempi kuin mallinuksen lähettämä pinnan z -arvo. Samoin Funktiossa `tilt[ ]` muuttuja `tilting` saa arvon epätosi, jos kallistuksen mukainen *roll* arvo on itseisarvoltaan pienempi kuin mallinuksen lähettämä pinnan *roll* arvo.

4.2.3 fysiikkamoduulin globaalit muuttujat

Fysiikkamoduulin vastaanottamat parametrit tallennetaan muuttujaan

```
dataIn={x, y, z, roll, pitch, yaw,  
elapsedTime, sledsCarburator, sledsBrake,  
driver_y, driver_z}
```

Fysiikkamoduulin palauttavat liikeparametrit tallennetaan muuttujaan

```
dataOut={sledx, sledy, sledz, xAcc, yAcc, zAcc, sledroll,  
sledpitch, sledyaw, rolVel, pitchVel, yawVel,  
rollAcc, pitchAcc, yawAcc,  
rollBuf, pitchBuf, zBuf, xBuf, yawBuf, yBuf, sledVel}
```

Moduulin lähes kaikki apumuuttujat ovat globaaleja muuttujia, jotta moduulin toiminta olisi mahdollisimman nopeaa. Seuraavassa esitetään toiminnan kannalta oleelliset apumuuttujat ja funktiot, jotka niitä käsittelevät.

Funktio `update[ ]` ylläpitää kelkan liikehistoriaa. Paikan, kaltevuuskulmien ja kulmanopeuksien arvot talletetaan 4x3 -matriiseihin, aika-arvot listaan. Spline käyrän mallinnuksessa tarvittavat tangentit talletetaan 2x3 matriisiin.

Funktio `splineFunction[ ]` laskee käyrän kaarevuuden, kaarevuussäteen, keskeiskiihtyvyyden ja gravitaatiokiihtyvyyden komponentin keskeiskiihtyvyyden suunnassa. Näillä muuttujilla voidaan määrittää kelkan mahdollisen ilmalennon alkaminen. Lisäksi funktio laskee yksikkötangentin ja -normaalin, joiden avulla voidaan laskea lentorata sekä kallistuksen määrittämisessä tarvittavien kulmien suuruudet.

Funktion `splineFunction[ ]` toiminnassa Mathematica operoi spline käyrän symbolisessa muodossa, jolloin myös yksikkövektorit saadaan symbolisen derivoinnin avulla. Tässä kohdin väärä lausekkeiden laskujärjestys aiheuttaa symbolisten lausekkeiden paisumisen liian suuriksi, jolloin niiden evaluointi vie liian aikaa.

4.3 Testauksesta

Fysiikkamoduulista on ohjelmoitu tätä kirjoitettaessa vasta toiminnallisuus, joka mallintaa liukumista ja ilmalentoa ilman kuljettajan ohjausimpulssien

huomioimista. Fysiikkamoduulia ei ole vielä testattu aidossa liikealustaympäristössä. Testauksia on kuitenkin tehty monessa vaiheessa siirryttäessä teoriasta käytäntöön. Seuraavassa esiteään fysiikkamoduulin testiajoa Mathematicasta käsin jo aikaisemmin käytetyllä testiaineistolla, jossa määritetään tietyt kelkan sijainnit 3D pinnalta ja liitetään niihin itse määritetyt ajankohdat. Syöteaineiston muita parametreja ei käsitellä tässä testauksessa.

```
testSurface = {x, y, 4 Sin[0.1 x y] Cos[0.1 x y]}
positions = Table[testSurface /. y -> x, {x, 0., 6.0, 0.4}]
tPs = Table[t, {t, 0., 1.8,  $\frac{1.8}{\text{Length}[\text{positions}] - 1}$ }]
dataInlista =
  Table[{positions[[i, 1]], positions[[i, 2]], positions[[i, 3]], 0.0, 0.0,
    0.0, tPs[[i]], 1.0, 1.0, 1.0, 1.0}, {i, 1, Length[positions]}]
```

Kuva 15: Testiaineisto

Moduulin ajetaan testiaineistolla Mathematicasta käsin, kun paketti on ensin alustettu kutsumalla funktiota `initialize[]`. Moduulin palauttamaa tulostusta on muutettu niin, että vain x, y ja z koordinaatit tulostuvat.

```
initialize[]
modelledPoints = Table[getData[dataInlista[[i]]], {i, 1, Length[positions]}]
```

Kuva 16: 1. testiajo

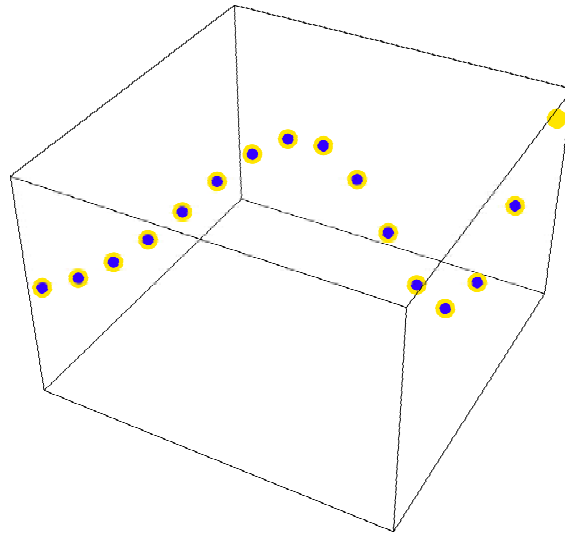
Alkuperäiset sijaintipisteet ja fysiikkamoduulin palauttavat x, y ja z koordinaatit tulostetaan seuraavilla grafiikkakäskyillä.

```
initialP = Show[Graphics3D[{PointSize[0.035], Hue[0.15], Point /@ positions}]]
afterP = Show[Graphics3D[{PointSize[0.020], Hue[0.7], Point /@ modelledPoints}]]
```

Kuva 17: Testitulosten muunto graafiseen muotoon

Kuvasta (18) nähdään, että mallinnetut pisteet noudattavat alkuperäistä reittiä, kun kelkan vauhti on aika hiljainen, mikä voidaan päätellä juoksevan ajan suhteesta kelkan sijaintiin.

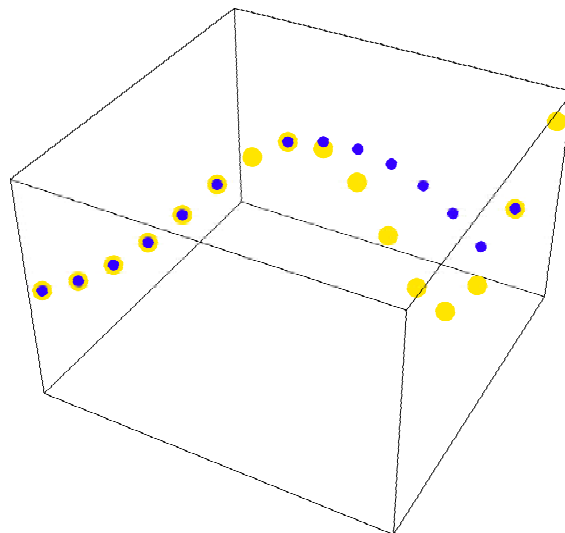
Seuraavalla testiajolla asetetaan aika-arvot kuvan (19) mukaisesti.



Kuva 18: Kelkan alkuperäiset ja mallinnetut pisteet 1. ajossa

```
tPs = Table[t, {t, 0., 1.8,  $\frac{1.8}{\text{Length}[\text{positions}] - 1}$ }]
```

Kuva 19: 2. testiajo



Kuva 20: Kelkan alkuperäiset ja mallinnetut pisteet 2. ajossa

Kuvasta (20) nähdään, että mallinnetut pisteet irtautuvat pinnasta ”mäen huipulla” ja palaavat takaisin pintakosketukseen vastamäessä. Liikeparametreilla 13. - 18. (luettelo 3.1) voidaan aiheuttaa alustan äkillisiä asennon muutoksia kuvan mukaisessa törmäystilanteissa.

4.4 Loppuarviointia

Symbolisen laskennan sekä monipuoliset ohjelmointi- ja grafiikkamahdollisuudet omaavan Mathematican käyttö mallinnuksen suunnittelussa on todella älyllisesti palkitsevaa ja käytännössä välttämätöntä. Teoriasta käytäntöön siirtyminen vaatii runsaasti ideoiden simulointimahdollisuuksia, joita hyvä grafiikka ja ohjelmointimahdollisuudet tarjoavat. Mathematica soveltuu erinomaisesti ideoiden tutkimiseen ja suunnitteluun. Tyypillisesti Mathematicaa käytetäänkin niin, että yhden istunnon ajan suoritetaan lukuisasti pienten ohjelmapätkien ajoja ja tutkitaan syntyneitä tuloksia. Laajemmat ohjelmakokonaisuudet kootaan paketeiksi, joita voi tarvittaessa kutsua Mathematicaa käyttäessä.

Perinteisiin proseduraalisiin ohjelmointikieliin tottunut voi kokea Mathematican ohjelmoimisen aluksi hankalaksi, koska Mathematica lähes edellyttää funktinaalisen ohjelmointityylin omaksumista, vaikka se sisältääkin perinteiset proseduraaliset ohjelmointirakenteet. Ohjelmien toimivuuden testauksessa perinteisten kielten monipuoliset debuggausmahdollisuudet puuttuvat Mathematicasta. Koin erittäin hankalaksi virheiden jäljittämisen ja löysin oikeastaan yhden käyttökelpoisen tavan jäljittää laajemmassa ohjelmakokonaisuudessa kohtaa, jossa joku menee pieleen, Mathematican funktion `Trace[]`. `Trace[omaLauseke, malli]` generoi listan kaikista mallin `malli` mukaisista lausekkeista, joita lausekkeen `omaLauseke` evaluoinnissa käytetään. Tällä tavalla voi tutkia esimerkiksi evaluoitaanko tiettyä muuttujaa tai funktio-kutsua missään vaiheessa. Tuloksesta ei tosin näe mitään tarkkoja ohjelman kohtia kuten debuggauksessa, vaan tulostuvasta listasta voi vain päätellä, missä virhe tapahtuu.

Symbolisen matematiikkaohjelman käyttö C++ ohjelmoinnin yhteydessä oli mielenkiintoinen kokeilu, johon aikaisemmin en ollut tutustunut. Kuinka hyvin Mathematica selviytyy symbolisen operoinnin ja numeerisen laskennan vaatimasta ajasta siten, että sen tuottamaa palvelua on reaaliaikaisessa sovelluksessa mahdollista käyttää? Testasin lopuksi edellisessä kappaleessa olevalla testiaineistolla yhden fysiikkamoduulin kutsun vaatimaa aikaa Mathematican ympäristössä kuvan (21) mukaisesti.

Yhden moduulin kutsun vaatima noin 10 ms aika lienee aika maksimaalinen

```

In[302]:=
      AbsoluteTiming[getData[dataInlista[[7]]]]

Out[302]=
      {0.0100144 Second, {2., 2., 1.43471}}

```

Kuva 21: Fysiikkamoduulin yhden evaluointikierroksen vaatima aika testiajossa.

aidossa liikealustaympäristössä, mikä jää nähtäväksi. Ohjelmakoodissa on tietenkin vielä paljon optimointimahdollisuuksia, joskin niitäkin on jo pyritty tekemään.

Mathematican lisäksi olen testannut moduulin toimivuuden C++ ympäristössä, jonka suunnitteli Antti Törmänen. Myös tässä ympäristössä paketin ajaminen onnistui, joskaan laajempaa tulosten analysointia ei ole suoritettu.

Tämän dokumentin kirjoittaminen $\LaTeX$ ladontaohjelmaa käyttäen oli todella työlästä, koska en aikaisemmin ollut ohjelmaa käyttänyt. Kuitenkin $\LaTeX$ syntaksi teknisesti noudattaa hyvin tyypillistä ohjauskielten tekniikkaa ja kirjoittamisen hitaus johtuu pelkästään rakenteiden käytön tottumattomuudesta. Dokumentin kirjoittaminen oli kuitenkin hyvää jatkoa Tenho Vanhasen Rovaniemen amk:ssa pitämälle $\LaTeX$ kurssille toukokuussa 2004. Kokemukset $\LaTeX$ ohjelman käytöstä ovat vielä hiukan selkiytymättömät.

Viitteet

- [1] Brian A. Barski, Computer Graphics and Geometric Modelling Using Beta-splines, Springer-Verlag,.
- [2] Barret O'Neill, Elementary Differential Geometry, Academic Press, 1995,
- [3] Abraham Goetz, Introduction to Differential Geometry, Addison-Wesley Series In Mathematics, 1970.
- [4] Kuipers) Jack B. Kuipers, Quaternions and rotation sequences, Princeton University Press, 1999
- [5] George Grätzer, Math Into $\LaTeX$ 3th ed., Birkhäuser-Springer, 2004
- [6] Stephen Wolfram, The Mathematica 4th ed., Cambridge University Press, 1999.

- [7] Linda G. Shapiro, George C. Stockman, Computer Vision, Prentice Hall, 2001.
- [8] Fletcher Dunn and Ian Parberry, 3D Math Primer for Graphics and Game Development, Wordware Publishing, 2002.