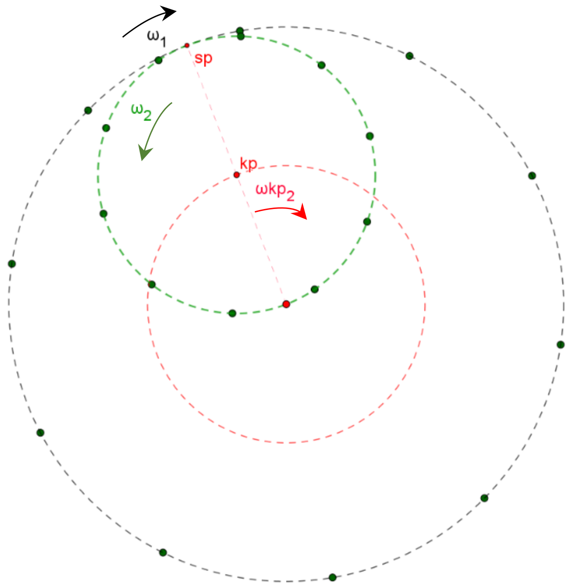
Kehäpisteen piirtämä ura sisäkkäin vierivien ympyröiden liikkeessä

Tutkitaan tilannetta, jossa useat sisäkkäiset ympyrät vierivät kukin omalla pyörimisnopeudellaan ulomman ympyränsä sisäkehällä. Uloin ympyrä pysyy kuitenkin paikallaan pyöriessään.

Sisimmän ympyrän johonkin kehäpisteeseen asetetaan kynä, ja tutkitaan milloin kynä piirtää suljetun käyrän, jota toistetaan loputtomasti ympyröiden jatkaessa vierimistä.

Seuraavassa osoitetaan, että suljettu käyrä syntyy aina, kun ympyröiden säteet keskenään ja kulmanopeudet keskenään ovat rationaalilukusuhteessa toisiinsa nähden. Lisäksi selvitetään, miten saadaan vaadittavat kierrosluvut ympyröiden keskipisteille ja piirtävälle kehäpisteelle, jotta suljettu käyrä on valmis



Tarkastellaan aluksi yksinkertaisuuden vuoksi ympyröiden säteiden ja niiden kulmanopeuksien muodostuvan vakiosuhteella seuraavasti:

$$\frac{r_{i+1}}{r_i} = m \in \mathbb{Q}, \qquad 0 < m < 1$$

$$\frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} = k \in \mathbb{Q}, \qquad k \neq 0$$

Jos $k < 0$, vierekkäisten ympyröiden kehäpisteet pyörivät vastakkaisiin suuntiin

Sisäympyrän keskipisteen ratanopeus <u>ulkoympyrän keskipisteen suhteen</u>: $vkp_{i+1} = \omega kp_{i+1}(r_i - r_{i+1})$

Kun ympyrä ei liu'u, on vierivän ympyrän keskipisteen hetkellinen etenemisnopeus yhtä suuri kuin kehäpisteen ratanopeus. Jos alusta (ulkoympyrän kaari) lisäksi liikkuu, on sen vaikutus lisättävä keskipisteen etenemisnopeuteen. Ratanopeuksien suunnat voidaan huomioida laskentakaavassa etumerkeillä.

Ulko- ja sisäympyröiden kehäpisteiden ratanopeudet <u>ympyröiden keskipisteiden suhteen</u>

$v_i = \omega_i r_i$ ja $v_{i+1} = \omega_{i+1} r_{i+1}$

Ratanopeuksien vektorisumma on sisemmän ympyrän keskipisteen etenemisnopeus ulkoympyrän keskipisteen suhteen.

Kun etumerkit huomioidaan, saadaan keskipisteen kulmanopeudelle kaava:

$$\boxed{\omega kp_{i+1} = \frac{\omega_i r_i - \omega_{i+1} r_{i+1}}{r_i - r_{i+1}}, i = 1,2, \dots, n-1}$$

missä n on ympyröiden lukumäärä. Nyt voidaan laskea sisäympyröiden keskipisteiden kulmanopeudet lähtien liikkeelle uloimman ympyrän kulmanopeudesta ω_1, jolloin hieman sieventämällä saamme jonon

$$(\omega kp)_{2,3,\dots} = \left\{\frac{1-k\,m}{1-m}, \frac{k(1-k\,m)}{1-m}, \frac{k^2(1-k\,m)}{1-m}, \cdots\right\}\omega_1 = \frac{k^{i-2}(1-k\,m)}{1-m}\omega_1,\ i = 2,3,\cdots.$$

Jos $\omega_1 = 0$, saadaan jono

$$(\omega kp)_{2,3,\dots} = \left\{-\frac{m}{1-m}, \frac{1-k\,m}{1-m}, \frac{k(1-k\,m)}{1-m}, \frac{k^2(1-k\,m)}{1-m}, \cdots\right\}\omega_2.$$

Kaikki eo. kertoimet ovat rationaalisia (murtolukuja). Kun ne kerrotaan rationaalisella kulmanopeudella saadaan edelleen murtoluvut.

Kun nyt tarkastellaan kaikkia pyörimisliikkeitä ($\omega_1 \neq 0$), saadaan jono kulmanopeuksia

$$\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \omega kp_1, \omega kp_2, \cdots, \omega kp_n\}, \qquad (*)$$

jotka kaikki ovat rationaalilukuja. Jotta pienimmän ympyrän (ω_n) kehäpisteen jälki alkaa toistamiseen piirtämään samaa suljettua käyrää, täytyy toteutua kaksi asiaa:

- ympyröiden keskipisteet (ωkp_i) ovat kiertäneet täydet kierrokset kaikilla $i \geq 2$
- jäljen piirtävä kehäpiste (ω_n) on kiertänyt täydet kierrokset

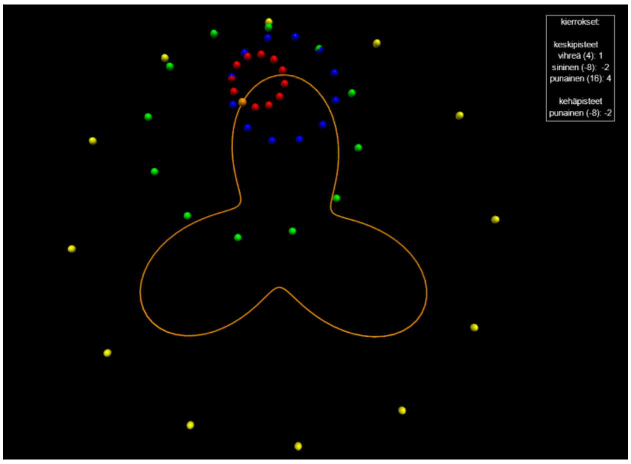
Tarkastellaan siis jonoa $J_n = \{\,\omega kp_2, \omega kp_3, \cdots, \omega kp_n, \omega_n\}$, missä rationaalilukujen on oltava supistetussa muodossaan. Valitaan nyt ajaksi $t = p2\pi$. Tällöin kunkin pyörimisliikkeen kierrosluvuiksi saadaan:

$$krs_i = \{\,\omega kp_2, \omega kp_3, \cdots, \omega kp_n, \omega_n\}\frac{t}{2\pi} = p\{\omega kp_2, \omega kp_3, \cdots, \omega kp_n, \omega_n\}$$

Pienin kokonaisluku p, jolla em. kierrosluvut ovat kokonaislukuja ja siten suljettu ratakäyrä muodostuu, on nimittäjien pienin yhteinen jaettava (pyj). Kuitenkin suljettu käyrä voi muodostua aikaisemminkin. Esimerkiksi, jos $k = -2$, $\omega_1 = \frac{1}{3}$ ja $m = \frac{1}{2}$, saataisiin 4 ympyrän tapauksessa

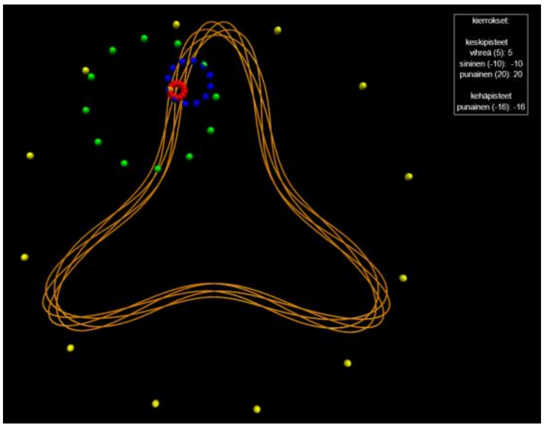
$$J_4 = \left\{\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{16}{3}, -\frac{8}{3}\right\}.$$

Nyt $pyj = 3$, jolloin kierrosluvuiksi tulisi $\{4, 8, 16, 8\}$. Kuitenkin käyrä muodostuu jo kierrosluvuilla $\{1, 2, 4, 2\}$ (kuva oikealla).



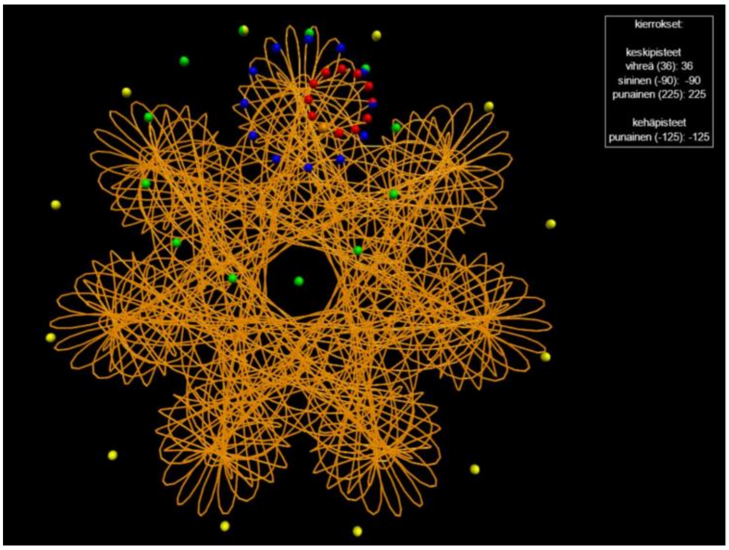
On tarkasteltava myös rationaalisia p:n arvoja. Täydet kierrosluvut saadaan myös kertomalla kulmanopeudet tekijällä $p = \frac{3}{4}$, missä 3 on nimittäjien pienin yhteinen jaettava (pyj) ja 4 on osoittajien suurin yhteinen tekijä (syt). Kun $t = \frac{3}{4}2\pi$, ovat kaikki tarkasteltavat pyörimisliikkeet kiertäneet täydet kierrokset. Matemaattisesti tekijä $p^{-1} = \frac{syt(osoit)}{pyj(nimit)}$ on kulmanopeus-rationaalilukujen suurin yhteinen tekijä. Se on suurin rationaaliluku, jolla jokainen kulmanopeus on jaollinen siten, että tuloksena on kokonaisluku. Tällöin saatavat kokonaisluvut ovat pienimmät mahdolliset.

Edellisen perusteella olivatpa m ja k mitä rationaalilukuja hyvänsä, löydetään aina kierrosluvut, jolloin kaikkien ympyröiden keskipisteet ja jäljen jättävä kehäpiste ovat kiertäneet täydet kierrokset ja päätyneet siten samaan alkutilanteeseen. Tilanne ei suljetun käyrän suhteen muutu, vaikka rationaaliset suhteet ympyröiden välillä vaihtelevat. Tällöinkin kaikkien kulmanopeuksien jono (*) on aina rationaalinen . (m.o.t)



Kuvassa ylhäällä on esimerkki $\omega_1 = \frac{1}{3}$, $m = \frac{1}{3}$ ja $k = -2$, jolloin kulmanopeuksille saadaan jono $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \boldsymbol{-\frac{8}{3}}\right)$ ja sisempien ympyröiden keskipisteiden kulmanopeuksille jono $\left(\boldsymbol{\frac{5}{6}}, -\boldsymbol{\frac{5}{3}}, \boldsymbol{\frac{10}{3}}\right)$. Näin ollen $pyj(6,3) = 6$ ja $syt(8,5,10) = 1$, joten $p = 6$. Nyt ympyröiden keskipisteet ovat kiertäneet $(5, 10, 20)$ kierrosta ja pienimmän ympyrän kehäpiste $6 \cdot \frac{8}{3} = 16$ kierrosta, jolloin suljettu käyrä alkaa piirtymään uudestaan.

Alemmassa kuvassa $\omega_1 = \frac{1}{3}$, $m = \frac{1}{2}$ ja $k = \frac{-5}{2}$, jolloin tarkasteltavaksi saadaan jono $\left\{\frac{3}{2}, -\frac{15}{4}, \frac{75}{8}, -\frac{125}{24}\right\}$. Tällöin $pyj(2,4,8,24) = 24$ ja $syt(3,15,75,125) = 1$, joten $p = 24$. Keskipisteiden kierrokset $\{36, -90, 225\}$ ja kehäpisteellä $24 \cdot \frac{125}{24} = 125$ kierrosta, jonka jälkeen alla oleva kuvio ei enää muuttunut.



Algoritmi ympyröiden kehäpisteiden laskemiseksi

Alkuarvot:

t=0	aika
m	säteiden suhde 0<m<1, $m \in \mathbb{Q}$
k	kulmanopeuksien suhde, 0<k, $k \in \mathbb{Q}$
r_1	uloimman ympyrän säde
ω_1	uloimman paikallaan pysyvän ympyrän kehäpisteiden kulmanopeus ($\omega k p_1 = 0$)

Kaavat

$$r_i = m\, r_{i-1}, \qquad i = 2,3,\cdots$$
$$\omega_i = -k\, \omega_{i-1}, \qquad i = 2,3,\cdots$$

keskipisteiden kulmanopeudet (ympyrät 1,2,…,n), uloin paikallaan) lasketaan kaavalla

$$\omega k p_{i+1} = \frac{\omega_i r_i - \omega_{i+1} r_{i+1}}{r_i - r_{i+1}}, i = 1,2,\dots,n-1$$

keskipisteiden koordinaatit, alkuhetkellä t=0 kaikki ympyrät ylimmässä asemassa

$$K_1(t) = (0, r_1)\ ,$$
$$K_i(t) = K_{i-1}(t) + (r_{i-1} - r_i)\left(\cos\left(\omega k p_i\, t + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\omega k p_i\, t + \frac{\pi}{2}\right)\right), \quad i = 2,3,\cdots$$

ympyrän i kehäpisteiden koordinaatit, pisteiden lukumäärä = s

$$P_i(t) = \left(K_i(t) + r_i\left(\cos\left(\omega_i\, t + j\frac{2\pi}{s}\right), \sin\left(\omega_i\, t + j\frac{2\pi}{s}\right)\right)\right)_{j=0}^{s-1}, i = 1,2,\cdots$$

Pienimmän ympyrän yhden kehäpisteen tulee jättää jälki.