Liukuminen pitkin 2D käyrää gravitaatiovoiman alaisuudessa

Kari Peisa 2021

Johto

Kappaleen kiihtyvyyden määritys

Alla olevaa teorian johtoa voidaan käyttää simuloimaan pistemäisen massan kitkallista liukua pitkin annettua käyrää niin, että liikkeeseen vaikuttaa alas suuntautuva painovoima, mahdollinen alkunopeus ja kitka. Tilanne, jossa kappale irtoaa käyrältä ilmaan, käsitellään myös.

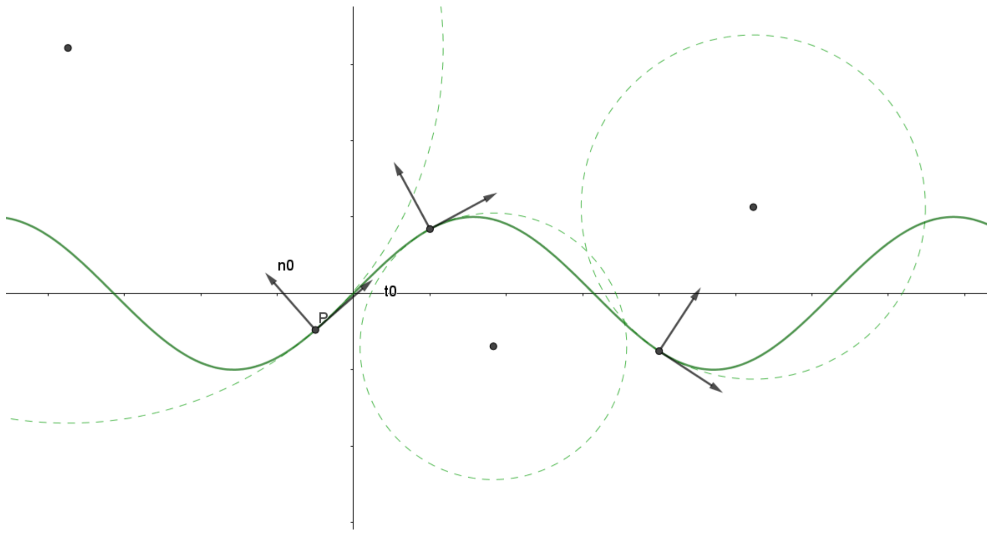
- Yleinen parametrimuotoinen 2D käyrä määritellään yhtälöllä $\boldsymbol{r}(s) = (x(s), y(s))$. Skalaariarvoinen funktio $y = f(s)$ voidaan esittää parametrimuodossa $\boldsymbol{r}(s) = (s, f(s))$. Tässä rajoitutaan kuitenkin käyriin, jotka eivät tee silmukoita.
- Määritetään käyrän **yksikkötangentti** ja **-normaali** kohdassa s (vaihtoehtoisia tapoja on)

$$\boldsymbol{t}^0(s) = \frac{\boldsymbol{r}\prime(s)}{|\boldsymbol{r}'(s)|} = \frac{(x'(s), y'(s))}{\sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2}} = \frac{(1, f'(s))}{\sqrt{1 + f'(s)^2}} \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{n}^0(s) = (-\boldsymbol{t}^0(s).y, \boldsymbol{t}^0(s).x), \qquad (2)$$

missä $.x$ ja $.y$ merkitsevät vektorin x- ja y-komponentteja. Näin määriteltynä tangentti osoittaa aina käyrällä siihen suuntaan, johon parametri s kasvaa, ja normaali käyrästä ylös (y-komponentti >0) eli aina painovoimasta poispäin.

Alla kuvassa yksikkövektorit sekä kaarevuusympyrät



- Käyrän **kaarevuussäde** määritetään parametrimuodosta $\boldsymbol{r}(s) = (x(s), y(s))$ kaavalla

$$k(s) = \frac{\left(x'(s)^2 + y'(s)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)} \tag{3}$$

tai muodosta $\boldsymbol{r}(s) = (s, f(s))$ kaavalla

$$k(s) = \frac{\left(1 + f'(s)^2\right)^{3/2}}{f''(s)}. \tag{4}$$

Kaarevuussäde on etumerkillinen säteen pituuden arvo. Kummastakin muodosta etumerkin määrää nimittäjä. Etumerkki on $+$, jos käyrä on kupera alaspäin eli konveksi (nimittäjä > 0), ja $-$, jos käyrä on kupera ylöspäin eli konkaavi (nimittäjä < 0). Tällöin kaarevuusympyrän keskipistettä kohti suuntautuva normaalivoima (keskeisvoima) kohdassa s määräytyy kaavalla

$$\boldsymbol{F}_n = m\frac{v^2}{k(s)}\boldsymbol{n}^0(s).$$

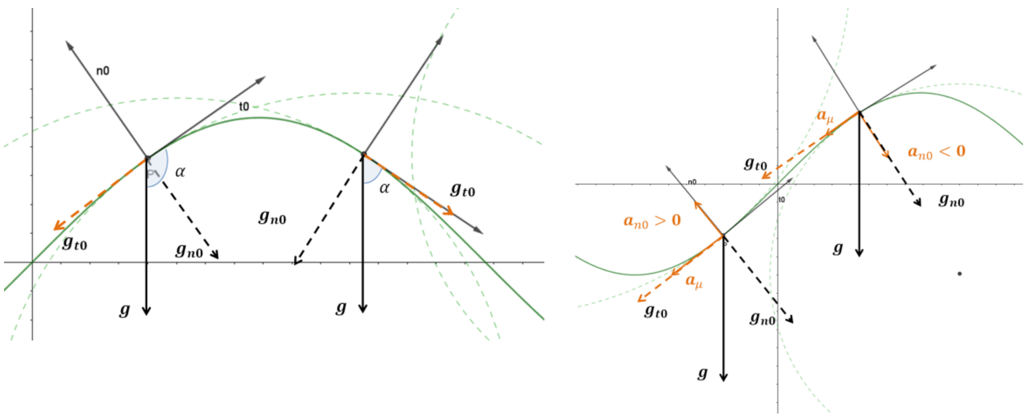
Keskeisvoima $\boldsymbol{F}_n$ osoittaa käyrän konveksilla osuudella yksikkönormaalin $\boldsymbol{n}^0$ suuntaan ja konkaavilla osuudella sitä vastaan. Tapauksessa $f''(s) = 0$, jolloin kaarevuussäde = ∞, on keskeisvoima 0.

Normaalikiihtyvyys saadaan siten:

$$\boldsymbol{a}_n = \frac{\boldsymbol{F}_n}{m} = \frac{v(s)^2}{k(s)}\boldsymbol{n}^0 \tag{5}$$

- **Määritetään kokonaiskiihtyvyys**

Kappaleen liiketilaan vaikuttavat voimat ovat pinnan tukivoima $\boldsymbol{T}$, painovoima $\boldsymbol{F}_g$ ja mahdollinen kitkavoima $\boldsymbol{F}_\mu$. Voimat aiheuttavat liukuvan kappaleen suunnan sekä vauhdin muutokset. Keskeisvoima $\boldsymbol{F}_n$ on edellisten summavektori. Kitkavoiman suuruuteen vaikuttavat sekä painovoima että tukivoima.



Määritetään kulma α = tangentin ja painovoiman välinen kulma, jolloin $\alpha \in [0, \pi]$.

Kulma α voidaan laskea esimerkiksi pistetulolla seuraavasti:

$$\alpha = \sphericalangle(\,\boldsymbol{t}^0, \boldsymbol{g}) = \cos^{-1}(\boldsymbol{t}^0 \cdot (0,-1)) \in [0,\pi].$$

Arvot 0 ja π merkitsevät pystysuoraa pudotusta tai nousua, jotka täytyy käsitellä erikseen johtuen siitä, että tangenttia määritettäessä tällöin $f'(s) \to (+/-)\infty$, kun $\alpha \to 0$.

Painovoiman tangentin suuntaisen komponentin suuruus:

$$F_{gt} = mg\ cos(\alpha) \tag{6}$$

ja normaalin suuntaisen komponentin suuruus

$$F_{gn} = mg\ sin(\alpha) \tag{7}$$

On huomioitavaa, että nousevalla käyrän osuudella $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on $\sin(\alpha) > 0$ ja $\cos(\alpha) > 0$, sekä laskevalla käyrän osuudella $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ on $\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha) > 0$ ja $\cos(\alpha) = -\cos(\pi - \alpha) < 0$. Tämä osoittautuu antavan voimille oikeat suunnat kaikissa eri tilanteissa kuten seuraavassa osoitetaan.

Kitkavoiman suuruus

$$\boldsymbol{F}_\mu = \mu\, \boldsymbol{T} = \mu(\boldsymbol{F}_{gn} + \boldsymbol{F}_n).$$

Normaalivoima $\boldsymbol{F}_n$ joko lisää tai vähentää tukivoiman suuruutta riippuen siitä, tapahtuuko liukuminen konveksilla vai konkaavilla osuudella.

Näin ollen kitkavoima lasketaan ao. kaavalla, joka huomioi niin liukumisen suunnan vaikutuksen (sign) kuin myös kuperuuden suunnan vaikutuksen (a_n):

$$\boldsymbol{F}_\mu = -\mathrm{sign}(\mathbf{v})\, \mu\big(F_{gn} + F_n\big)\, \boldsymbol{t}^0 = -\mathrm{sign}(\mathbf{v})\, \mu\, m(g \sin(\alpha) + a_n)\ \ \boldsymbol{t}^0.$$

Tukivoima ma_n kasvattaa kitkavoimaa, kun $a_n > 0$ eli konveksilla osuudella, ja pienentää kitkavoimaa, kun $a_n < 0$ eli konkaavilla osuudella kuten pitääkin.

Etumerkin määräävä $\mathrm{sign}(\mathbf{v})$ on $+1$, jos $\mathbf{v} \uparrow\uparrow \mathbf{t}^0$, ja -1, jos $\mathbf{v} \uparrow\downarrow \mathbf{t}^0$. Näin ollen, kun liukuminen tapahtuu kasvavan parametrin suuntaan ($\mathrm{sign} = 1$), kitkavoiman suunta on kaikilla käyrän osuuksilla vastakkainen tangentin suunnalle. Suunta kääntyy vastakkaiseksi kappaleen liukuessa pienenevän parametrin suuntaan ($\mathrm{sign} = -1$) kuten pitääkin.

Edellisen perusteella saamme tangentiaaliselle kiihtyvyydelle

$$\boldsymbol{a}_t = \big(g\ cos(\alpha) - \mathrm{sign}(\mathbf{v})\mu(g\ sin(\alpha) + a_n)\big)\, \boldsymbol{t}^0 \tag{8}$$

Tarkastellaan vielä painovoiman tangentin suuntaista komponenttia $g\ cos(\alpha)$, missä kulma α on tangentin ja painovoiman välinen kulma. Tällöin laskevalla käyrän osuudella $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ kuljettaessa kasvavan parametrin suuntaan on $g\ cos(\alpha) > 0$ ja nousevalla käyrän osuudella puolestaan $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ ja $g\ cos(\alpha) < 0$. Edelliset täsmäävät sen suhteen, miten painovoiman tulee vaikuttaa tangentiaaliseen kiihtyvyyteen. Kun nopeus on vähenevän parametrin suuntaan, vaihtuvat nousevan ja laskevan käyrän kulmavälit keskenään ja painovoiman vaikutuksen suunta tangentiaaliseen kiihtyvyyteen vaihtuu päinvastaiseksi. Koska nopeuden suuntakin on päinvastainen edelliseen verrattuna, toimii tämäkin määrittely oikein.

Kaiken kaikkiaan huomataan, että yksi ainoa määritys kaava (8) hoitaa kaikki mahdolliset liukumistapaukset käyrällä, joka ei tee silmukoita, kunhan sen osat vain päivitetään.

Kokonaiskiihtyvyys saadaan siten kaavoilla (5) ja (8)

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n. \tag{9}$$

Simulaation laskennassa täytyy huomioida, että joissakin kohdissa voi toteutua $f''(s) = 0$, jolloin $k(s) \to \pm\infty$, kun $f''(s) \to 0$. Tämän vuoksi on määriteltävä $a_n = 0$, kun $f''(s) = 0$.

Kappaleen pitäminen käyrällä sen liukuessa

Numeerisen menetelmän tarkkuus voi olla hyväkin, mutta jos liukuminen on pitempiaikaista ja mahdollisesti edestakaista, alkaa kappale hiljalleen irrota käyrältä, ellei sitä erikseen pidetä käyrällä.

Kappale saadaan pidettyä käyrällä käyttämällä käyrän pituuden parametrin s ja koordinaatiston koordinaattien välistä yhteyttä. Käyrän pituus funktiolle $y = f(x)$ kohdassa x on

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Tällöin on voimassa differentiaaliselle muutokselle

$$ds = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = v(x)\, dt,$$

josta saadaan

$$dx = \frac{v(x)\, dt}{\sqrt{1+f\prime(x)^2}} \tag{10}$$

Kappaletta voidaan nyt siirtää käyrällä uuteen pisteeseen käyttämällä kaavaa (10).

$$pos\ = (x + dx, f(x + dx)) \tag{11}$$

Parametrimuodossa, kun parametrina l, saadaan

$$ds = \sqrt{x'(l)^2 + y'(l)^2} dl = v(l)\, dt$$

$$dl = \frac{v(l)\, dt}{\sqrt{x'(l)^2 + y\prime(l)^2}} \tag{12}$$

$$pos\ = (x(l + dl), y(l + dl)) \tag{13}$$

Edellisellä tavalla kappale siirtyy aina käyrän pisteeltä toiselle. Jokaisessa pisteessä määritetään käyrän tangentti ja normaali, jotka määräävät nopeuden sekä voimien suunnat ja suuruudet.

Kappaleen irtoaminen käyrältä ja ilmalento

Kappale irtoaa käyrältä, jos kappale on liukumassa konkaavilla osuudella ja sen vauhti on niin suuri, ettei painovoima kykene pitämään sitä käyrän kaarevuusympyrän radalla. Ehto voidaan kirjoittaa tapaukselle $\boldsymbol{r}(s) = (s, f(s))$:

Irtoaminen tapahtuu kohdassa x, kun

$$f''(x) < 0 \text{ ja } |g\ cos(\alpha)| < |\frac{v^2}{k(x)}|. \tag{14}$$

Yleiselle parametrikäyrälle $\boldsymbol{r}(s) = (x(s), y(s))$ voidaan kyllä laskea kaavan (3) avulla, onko käyrän kohta konveksi tai konkaavi. Mutta simulaation kannalta on huolehdittava, ettei parametrimuotoinen käyrä tee silmukoita. Kappaleen liukuessa ”ylösalaisin” tulisi muuttaa myös normaalin suunta ja laskea voimavaikutukset eri tavalla. Silmukkamuotoja ei tarkastella tässä.

Ilmalennon aikana kappaleen kokonaiskiihtyvyys on koko ajan (kun ilmanvastusta ei käsitellä) vakio $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}$. Jotta valmistaudumme kohtaamaan käyrän uudelleen, pitää huolehtia siitä, että tiedämme mihin kohtaan käyrää olemme törmäämässä, jotta saamme laskettua käyrän yksikkötangentin ja -normaalin. Vapaassa heittoliikkeessä vaakasuuntainen nopeus on myös vakio ja x-koordinaatin muutos

$$dx = v_x dt = (\boldsymbol{v}\ dt) \cdot (1{,}0) \tag{15}$$

Törmäys tapahtuu, kun kappaleen y-koordinaatti on pienempi kuin käyrän y-koordinaatti (tässä voi helposti tulla pieniä virhesiirtymiä riippuen eri päivityksien järjestyksestä ja siitä huomioidaanko kappaleen dimensioita).

Törmäys käyrään tulee sitten myös jotenkin toteuttaa. Helpoiten törmäyksen saa hoidettua joko täysin kimmoisalla tai täysin kimmottomalla törmäyksellä. Edellisessä voi asettaa niin, että käyrän suuntainen nopeuden komponentti (vektoriprojektio) säilyy ja käyrän normaalin suuntainen komponentti muuttuu vastakkaiseksi. Jälkimmäisessä tapauksessa normaalin suuntainen komponentti asetetaan vain 0:ksi. Osittain kimmoisa törmäys edellyttääkin sitten impulssiperiaatetta ja sysäyskertoimen käyttöönottoa, jota ei tässä käsitellä.