Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisumenetelmiä

- **Lineaarinen yhtälöryhmä muuttujien $x_1, x_2, \cdots, x_n$ suhteen**
  - ***Polynomimuoto (n kpl muuttujia, m kpl yhtälöjä)***

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_2 &= b_m \end{aligned}$$

  - ***Matriisimuoto***

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

  - ***Kytketty matriisi***

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

- **Yhtälörymän ratkaiseminen jakaantuu kolmeen eri periaatteelliseen tapaukseen**

Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua

Yhtälöryhmällä on **yksi yksikäsitteinen** ratkaisu $x_1 = a_1, \ x_2 = a_2, \ \cdots, \ x_n = a_n$, **jolloin yhtälöiden lkm m = muutujien lukumäärä n**

Yhtälöryhmällä on **lineaarisesti toisistaan riippuvat ratkaisut**, jolloin yhtälöryhmällä on vähintään yksi ns. **vapaa muuttuja**, josta toiset ratkaisut riippuvat jonkin lineaarisen yhtälön mukaan. Osa ratkaisuista voi olla myös yksikäsitteisiä.

- **Yhtälörymän ratkaisumenetelmiä**

Determinanttimenetelmä perustuen **Cramerin sääntöön** sopii tapaukseen 2.

Käänteismatriisimenetelmä sopii tapaukseen 2.

Gaussin eliminointimenetelmä sopii kaikkiin tapauksiin

- **Laskin**

  Laskimessa voi olla valmiina lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisutoiminto. Jos laskimesta löytyy matriisitoiminnot, menetelmät 1 ja 2 voidaan suorittaa sillä ilman sisäänrakennettua ratkaisufunktiota. Gausin menetelmää ei yleensä ole valmiina laskimen yhtälönratkaisutoiminnoissa.

- **Determinanttimenetelmä**

  Merkitään **A = kerroinmatriisi =** $\begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \cdots & \mathbf{a_{1n}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} & \cdots & \mathbf{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a_{n1}} & \mathbf{a_{n2}} & \cdots & \mathbf{a_{nn}} \end{pmatrix}$ ja A_j== $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$**, missä**

kerroinmatriisissa j:s sarake on korvattu sarakkeella $\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}$

Ratkaisut $x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \cdots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$

- **Esimerkki 1.**

2x+3y−z=0
x−2y+z=2
3x+2y−4z=5

$$x = \frac{\mathrm{Det}\left[\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & -4 \end{pmatrix}\right]}{\mathrm{Det}\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}\right]} = 1 \qquad y = \frac{\mathrm{Det}\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}\right]}{\mathrm{Det}\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}\right]} = -1 \qquad z = \frac{\mathrm{Det}\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}\right]}{\mathrm{Det}\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}\right]} = -1$$

Jos det(A) = 0, ei yhtälöryhmällä ole yksikäsitteistä ratkaisua. Determinanttimenetelmä ei sovellu tutkimaan onko mahdollisesti lineaarisesti riippuvia ratkaisuja, siihen on käytettävä Gaussin eliminointimenetelmää

- **Käänteismatriisin käyttö**

Merkitään **A** = **kerroinmatriisi** = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, **x** = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ja **b** = $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, jolloin yhtälö ja ratkaisu voidaan esittää seuraavasti:

$$\mathbf{A\ x = b}$$

$$\mathbf{x = A^{-1}\ b}$$

missä A^{-1} on kerroinmatriisin **käänteismatriisi (inversion), joka on olemassa, jos det(A) ≠ 0**

- **Esimerkki 2.**

2x+3y−z=0
x−2y+z=2
3x+2y−4z=5

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathrm{Inverse}\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}\right] . \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- **Gaussin eliminointimenetelmä**

Gaussin eliminointimenetelmä on yleinen ratkaisumalli kaikille lineaarisille yhtälöryhmätapauksille. Menetelmässä käytetään **kytkettyä matriisia**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

- **Yhtälöryhmän ratkaiseminen alkeisrivioperaatioilla**

Yhtälöryhmän ratkaisu löydetään muuntamalla kytketty matriisi alkeisrivioperaatioilla ns. **porrasmuotoon**, josta ratkaisut saadaan **takaisinsijoituksen** periaatteella etenemällä viimeisestä rivistä ylöspäin ensimmäiseen riiviin.

Porrasmuodon määrittely

Matriisi on porrasmuodossa (riveittäin), jos seuraavat kolme ehtoa toteutuu:

1. Kakki mahdolliset **nollarivit ovat matriisin alimmat rivit**
2. Jokaisen rivin ensimmäinen nollasta eroava alkio eli ns. **johtava alkio on sarakkeessa, joka on vähintään yksi indeksi oikealle sen yläpuolella olevasta johtavasta alkiosta**
3. Kaikki **alkiot jokaisen johtava alkion alapuolella ovat nollia**.

Esimerkki 3. Seuraavat matriisit ovat (rivi-) porrasmuodossa. Johtava alkio ■ on jokin nollasta poikkeava alkio, alkiot □ voivat saada mitä arvoja tahansa (myös 0)

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & \square & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & \blacksquare & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \square \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \blacksquare & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \square & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \blacksquare & \square & \square \\ 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alkeisrivioperaatiot

1. **Rivien vaihto**, merkitään $R_i \longleftrightarrow R_j$
2. **Rivin kertominen** nollasta eroavalla luvulla, merkitään $R_i \longrightarrow c\, R_i$
3. **Rivin korvaaminen**: Johonkin riviin lisätään toinen rivi kerrottuna halutulla vakiolla, merkitään $R_i \longrightarrow R_i + c\, R_j$.

Kaksi matriisia ovat **riviekvivalentit**, jos ne voidaan saada toisistaan peräkkäisillä alkeisrivioperaatioilla. Yhtälöryhmän ratkaisun kannalta tämä tarkoittaa, että riviporrasmuotoon saatettua kytkettyä matriisia vastavalla yhtälöryhmällä on täsmälleen samat ratkaisut kuin alkuperäisellä yhtälöryhmällä.

Takaisinsijoitusperiaate

Kun kytketty matriisi on saatettu porrasmuotoon, saadan ratkaisut takaisinsijoitusperiaatteella lähtien liikkeelle viimeisestä rivistä, jossa kaikki alkiot eivät ole nollia. Saatua ratkaisua käytetään luotaessa ratkaisua seuraavasta rivistä jne.

Algoritmi Gaussin eliminointimenetelmälle

Gaussin eliminointimenetelmässä muodostetaan yhtälöryhmästä kytketty matriisi, joka muunnetaan alkeisrivioperaatioilla porrasmuotoon, josta ratkaisut saadan takaisinsijoitus -periaatteella. Menetelmän voidaan kuvata algoritmina:

Askel 1. Aloita matriisin vasemmanpuolisimmasta sarakkeesta, jossa esiintyy ainakin yksi nollasta eroava alkio. Jos sellaista ei ole mene askeleeseen 4. Mikäli ensimmäisen rivin alkio on nolla, vaihda ylimmäksi riviksi ensimmäinen sellainen rivi, jossa aloitussarakkeessa oleva alkio on nollasta eroava.Valitse ensimmäisen rivin ensimmäinen alkio ns. **pivot-alkioksi**.

Askel 2. Muunna alkeisrivioperaatiolla 3. kaikki **pivot-alkion alapuolella olevat alkiot nollaksi**

Askel 3. Rajatan matriisiksi alimatriis, josta pivot-alkiota cvastaava sarake ja rivi on poistettu ja toistetaan askeleet 1 ja 2.

Askel 4. Aloita viimeisestä nollasta eroavasta rivistä ja muunna se yhtälöksi sekä ratkaise yhtälö tuntemattoman muuttujan suhteen. Mikäli ratkaisu löytyi, sijoita saatu ratkaisu edellistä ylempää riviä vastavaan yhtälöön ja ratkaise se tuntemattoman muuttujan suhteen. Etene näin ensimmäsieen riviin saakka.

Esimerkki 4. Ratkaise Gausin elkiminointimenmetelmällä oheinen yhtälöryhmä

$$x + 2y - z == 1$$
$$-x + 2y - z == 3$$
$$x - y - z == 1$$

Kytketty matriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 + R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + \frac{3}{4} R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{-3}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

Viimeinen matriisi on porrasmuodossa ja ratkaisut saadan takaisinsijoituksella

$$\frac{-3}{2} z = 3 \longrightarrow z = -2$$
$$4y - 2 \cdot (-2) = 1 \longrightarrow y = 0$$
$$x + 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-2) = 1 \longrightarrow x = -1$$

Ratkaisu
$$x = -1$$
$$y = 0$$
$$z = -2$$

Esimerkki 5. Ratkaise Gausin elkiminointimenmetelmällä oheinen yhtälöryhmä

$$x + 2y - z == 1$$
$$-x + 2y - z == 3$$

Kytketty matriisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 + R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Viimeinen matriisi on porrasmuodossa ja ratkaisut saadan takaisinsijoituksella. Viimeisessä rivissä on vapaita muuttujia, joten yksikäsitteistä ratkaisua ei saada. Valitaan vapaksi muuttujaksi z (myös y voitaisiin valita). Ratkaisut voidaan esittää lineaarisina yhtälöinä, joissa esiintyy vapaita muuttiuja. Osa muuttujista voi silti saada yksikäsitteisen arvon ratkaisuna.

$$4y - 2z = 4 \longrightarrow y = \frac{1}{2}z + 1$$

$$x + 2y - z = 1 \longrightarrow x = -2\left(\frac{1}{2}z + 1\right) + z + 1 = -1$$

Ratkaisu

$$x = 1$$
$$z \in \mathbb{R},$$
$$y = \frac{1}{2}z + 1$$